

量子削除誤り訂正符号の 基礎と最前線

千葉大学 萩原学

2026/5/22 情報理論研究会 京都テルサ

削除誤り

38文字の連続したDNAコード

長さを測れば欠損は分かりますが、どの箇所の文字が抜けたかは特定不可能です。

削除：どこが消えたか分からない恐怖

消失（俗書が暇知）とは異なり、データのどのビットが失われたのか特定できません。

フレームシフトの連鎖

1箇所の欠損が後続すべての読み取り枠をずらし、全データを無意味化します。

デリミタの不在が招く同期不全

効率化のために区切りをなくした結果、データの開始位置が判別不能になります。

レーストラックメモリ

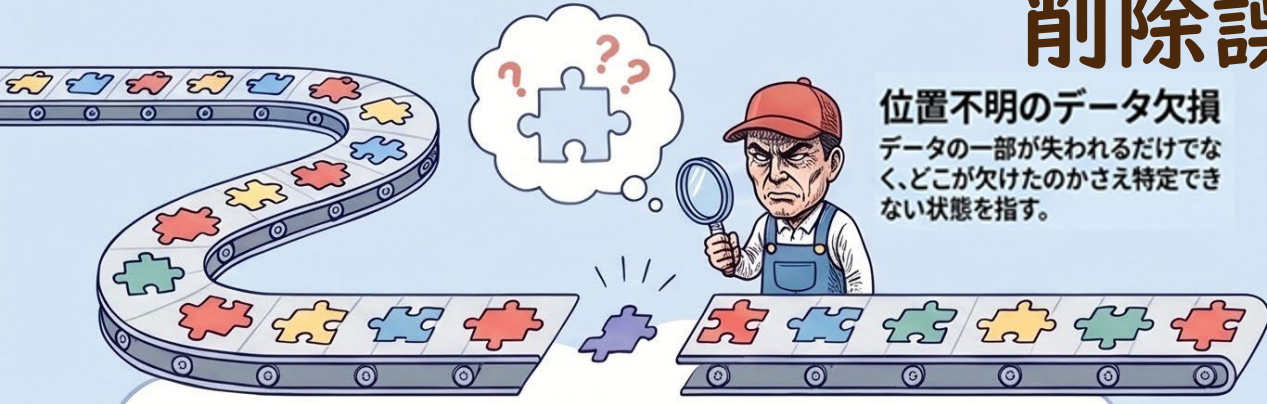
レーストラックメモリのシフティング

読み取りポートが1ビット飛ばすだけで、単一の誤りが数ビット以上のエラーへ拡大します。

生物学的機能の完全喪失

DNA配列において、この誤りはタンパク質合成を根本から狂わせる致命的な変異となります。

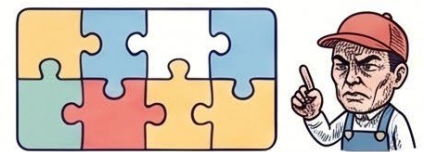
削除誤り



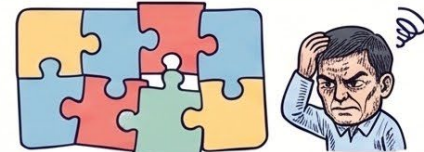
消失 (Erasure)



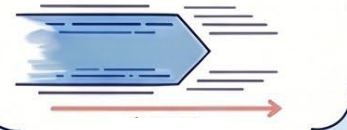
削除 (Deletion)



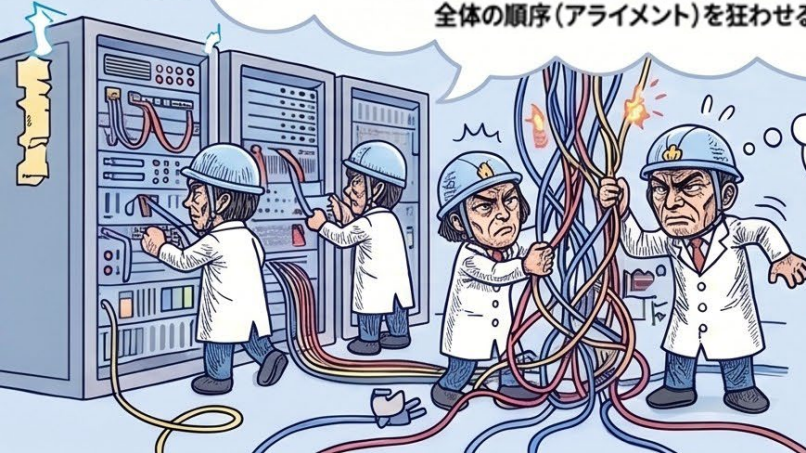
『消失』よりも深刻な復号の困難さ
位置がわかる「消失」と異なり、削除はデータ全体の順序 (アライメント) を狂わせる。



高速なIPストリーム切り替え

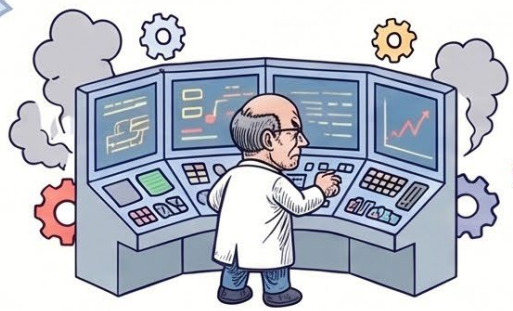


伝送プロセスでの発生可能性
バケットの視界が狭くなることで削除が発生しやすい。



映像同期の破綻 (リップシンク不全)

4K映像の膨大なデータの中で1つ削除が起きただけで、音と映像の同期が瞬時に崩れる。



$$S(x_i^0 | x_i, x) = \frac{2}{M\alpha^2} \int_0^1 S(x_i^0 | x_i, F(x)) dx$$

$$= \frac{d^2 x^{2\alpha}}{d\alpha^2} a(0) + \sum_{i=1}^n (ve^{-1+i}) + \sum (ve^{i\alpha e})$$

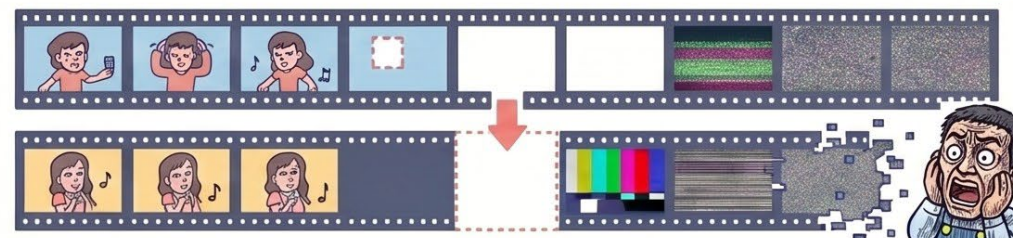
$$x = \frac{1}{(0+a)^2} + \left(dx + \frac{G}{hx} \alpha \alpha \left(\frac{d^2 e - 4e^2}{d\alpha + \alpha y} \right)^2 \right)$$

$$f(x) = \int_0^1 1x^2 dx + \frac{x^2}{(2\theta i + 10)^2} = 0$$

10%

リアルタイム編集の処理遅延

欠損位置の推定に膨大な計算資源を消費し、10地点同時スイッチなどの低遅延処理が不可能になる。



視覚的な破綻 (Visual Loss)

一部のデータ欠損が連鎖的なミスを誘発し、映像フレーム全体の欠落やノイズへと直結する。





量子ビットとは

量子状態は
量子系の状態

量子状態は
密度行列によって
数学的に記述される

状態ベクトル
(純粋状態)

確率や統計的な
混ざり合いである
「混合状態」も
同時に見えるぞ!

浮世に解ける 量子状態の理 (ことわり)

量子状態は、
量子系の「すべて」。
システムの構築、進化、
測定のルールを
網羅する、物理系の
数学的な化身です。

状態ベクトルを一般
化したもので、行列
形式を用いてシス
テムの統計的性質を
完璧に表現します。

$$\begin{pmatrix} \rho & \text{tr} & \sum p_i & \psi_i \\ \text{tr} & \sum & \sum p_i & \psi_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho & \text{tr} & \dots & |\psi\rangle\langle\psi| \end{pmatrix}$$

密度行列が満たす
3つの条件:

自己共役(エルミート)
であり、トレース
が1で、

であり、トレースが
1で、非負定値という
数学的性質を持ちます。

$$\text{tr}(\rho A)$$

測定確率を導き出す
「魔法の行列」。
密度行列 ρ を使うことで、
あらゆる測定結果の
期待値を $\text{tr}(\rho A)$ という形
で計算できます。

量子系：情報をまとめる粒子の世界

状態を量子情報として記述する「粒子」



量子系とは、その状態が数学的なベクトル（量子情報）として表現される粒子のことです。

無限の状態を生む「重ね合わせ」



2つの独立した状態の比率と位相差を変えることで、無限に多くの状態を保持できます。



量子ビット (Qubit) の基礎

この重ね合わせの性質が、次世代の計算を担う量子情報の最小単位となります。

光子の偏光 (光の粒)



光の振動方向（垂直・水平など）を量子状態として利用します。

電子や原子核のスピン



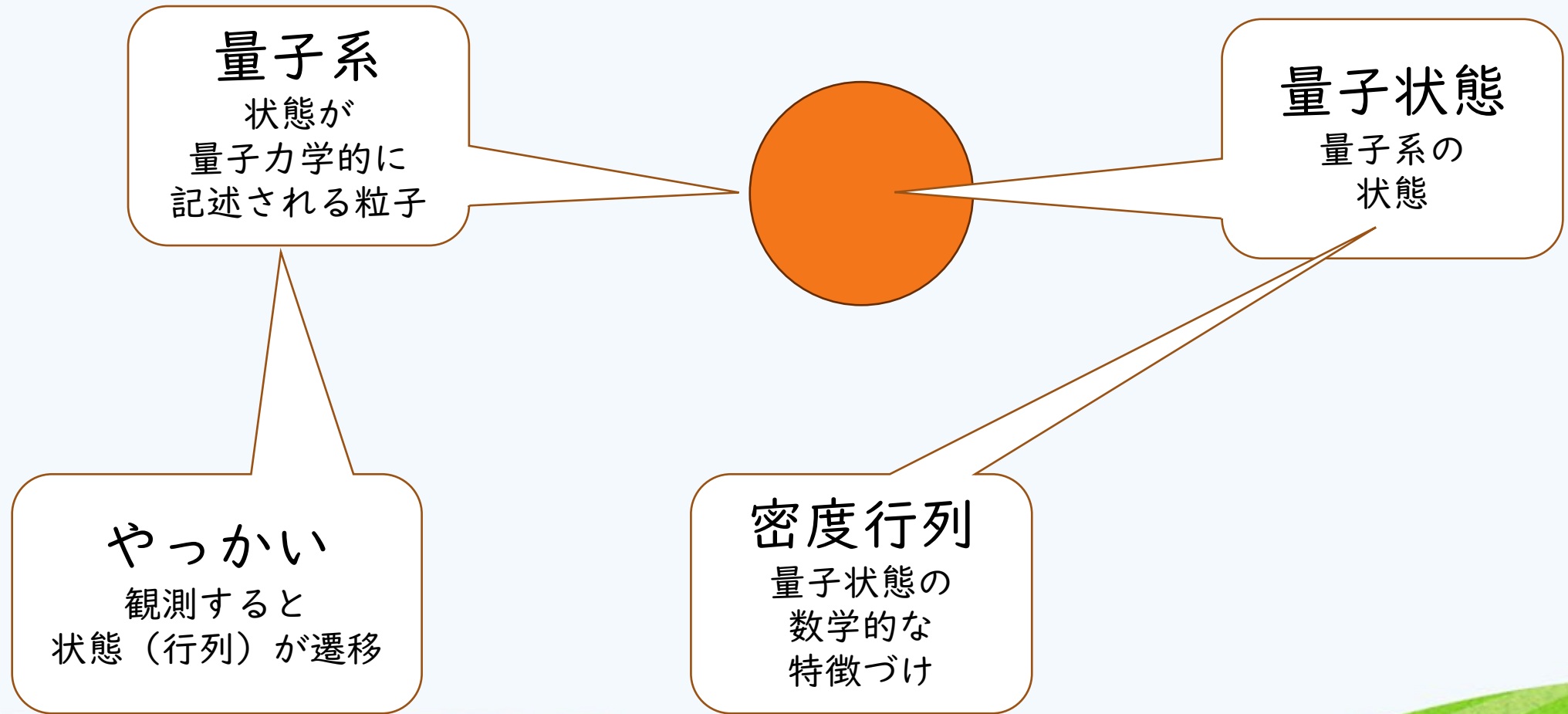
粒子が持つ「スピン1/2」という回転のような性質は、代表的な2状態系です。

原子内のエネルギー準位



特定の波長の光に应答する原子の「2つのエネルギー状態」も量子系として扱えます。

量子系、量子状態、密度行列



密度行列の数学的3要件：量子状態を記述するための基礎

量子系を記述する「密度行列 ρ 」、「密度演算列」(密度演算子) ρ は、純粋状態だけでなく混合状態も表現できる重要なツールです。物理的に意味のある量子状態であるためには、エルミート性、トレース1、半正定値性の3条件をすべて満たす必要があります。

ステップ1：物理量としての整合性と確率の保存

条件1：エルミート性 (Hermiticity)

$$\rho = \begin{pmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{pmatrix}$$

密度演算子は自己共役

$$\rho = \rho^\dagger$$

条件2：トレースは1である (Trace = 1)

$$\rho = \begin{pmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{pmatrix} = \text{100\%}$$

全確率の和を1
(対角成分の総和が1)

$$\text{Tr}(\rho) = 1$$

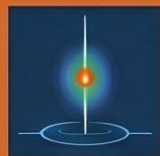
ステップ2：物理的な実現可能性の保証

条件3：半正定値 (非負定値) 性

$$\langle \psi | \rho | \psi \rangle \geq 0$$

任意のベクトルに対して $\langle \psi | \rho | \psi \rangle \geq 0$
固有値がすべて非負

純粋状態と混合状態の判定



純粋状態

$$\text{Tr}(\rho^2) = 1$$



混合状態

$$\text{Tr}(\rho^2) < 1$$

状態の純粋さは $\text{Tr}(\rho^2)$ で判定し、1
なら純粋、1未満なら混合状態です。

純粋状態と混合状態の実可能性

状態の純粋さは $\text{Tr}(\rho^2)$ で判定し、
1なら純粋、1未満なら混合状態です。

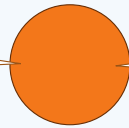
密度行列が満たすべき数学的性質のまとめ

条件名	数式表現	物理的意味
エルミート性	$\rho = \rho^\dagger$	観測期待値が実数になる
トレース1	$\text{Tr}(\rho) = 1$	全確率の総和が1になる
半正定値性	$\rho \geq 0$	負の確率が出現しない

量子ビット／キュービット

量子系、量子状態、密度行列

量子系
状態が
量子力学的に
記述される粒子



量子状態
量子系の
状態

密度行列
量子状態の
数学的な
特徴づけ



準位

密度行列の
(正方行列としての)
サイズ
(=行数)
量子系から定まる

2準位の例

量子ビット

Qubit
2準位の
量子状態

以降の量子系は
状態を量子ビットと仮定

量子削除



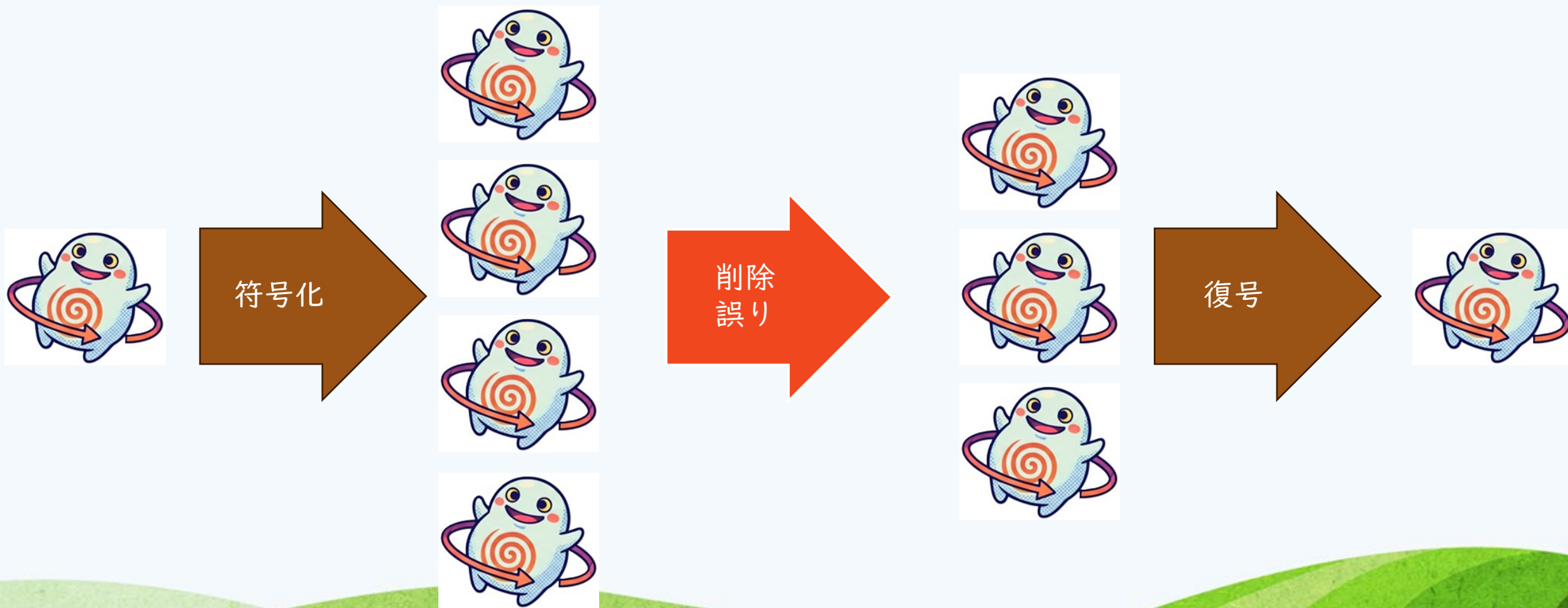
削除
量子系の個数が減る
どれが欠損したかはわからない



削除位置が
わかるときは
消失
と呼ばれる
消失誤りは
訂正し易い

量子削除符号化（復号込み）

（例として1量子ビットを4量子ビットへ）



削除誤り訂正の流れを 数式で



符号化



削除
誤り



復号



ρ : 密度行列
メッセージ

$\sigma := E(\rho \otimes \pi)E^*$: 符号化

E : ユニタリ行列

π : (冗長度用) 密度行列

$\tau := \text{tr}_I(\sigma)$:
位置 I を削除

$D\tau D^*$: 復号
 $\rho \otimes \pi' = D\tau D^*$
なら成功

ρ に戻る
 π' は任意

削除誤り訂正符号の要件を数式で

削除誤り訂正とは

符号化 E と復号 D (および冗長性のための π)
であり

任意の ρ : メッセージと

任意の I : 削除位置

に対し、

$$\rho \otimes \pi' = D(\text{tr}_I [E(\rho \otimes \pi) E^*])$$

ただし π' は冗長相当の密度行列



補足：どうしてテンソル積 \otimes ?

もつれあっていない状態を まとめた状態 を記述する道具



ρ



π

個別で
とらえた
それぞれの
状態



τ

$$= \rho \otimes \pi$$

もつれあって
いないとき

$$\neq \rho \otimes \pi$$

もつれあって
いるとき

数式表現は
のちほど～

補足： どうして部分トレース tr_I ?

まとめた状態 から 一部の状態 を記述する道具

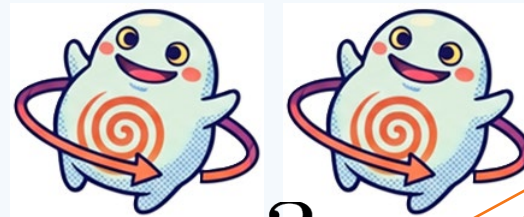


ρ



π

個別で
とらえた
それぞれの
状態



?
 $\tau = \rho \otimes \pi$

一致するとは
限らなくても

一致するとは
限らなくても

$$\rho = \text{tr}_2(\tau)$$
$$\sigma = \text{tr}_1(\tau)$$

實現例
置換不変な符号化



置換不変な量子状態：

量子系を並び替えても状態が変わらない

例えば



$$\rho_{1234}$$



$$\rho_{4213}$$

こんな感じでも
変わらない

$$\rho_{1234} = \rho_{4213}$$

置換不変な情報

古典よりも量子の方がバリエーションあり

例 1) $\rho \otimes \rho \otimes \rho \otimes \rho$

同じ状態 4 つ

古典だと 0000, 1111 に相当

例 2) 縦ベクトル x を
量子系的に置換してできる
ベクトル y_1, y_2, \dots, y_t に対して
 $a := y_1 + y_2 + \dots + y_t$ として

長さが 1 に
なるよう
スカラー倍
してね

$$aa^*$$

Dicke状態

例2) 縦ベクトル x を
量子系的に置換してできる
ベクトル y_1, y_2, \dots, y_t に対して
 $a := y_1 + y_2 + \dots + y_t$ として
 aa^*

$$x := \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \dots \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{N-w \text{ 個}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w \text{ 個}}$$

$$|0\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ と書いて}$$

$$x = |00 \dots 11\rangle \text{ と表記}$$

a はハミング重み w ビット列全体の和みたいなもの

置換不変の御利益

置換不変な「消失誤り」訂正符号が知られている

置換不変なら「削除誤り」は「消失誤り」とみなせる



どこが削除されても、末尾の削除とみなせる。

位置が特定できるから、削除ではなく、消失とみなせる。

置換不変の限界

符号長（量子系の個数）が一定のとき（いわゆるブロック符号と呼ばれるとき）

符号化率が上がらない

置換不変な状態は Dicke状態の一次結合

n qubitsで作れるDicke状態は $n+1$ 個

符号化率は高々

$$\frac{\log_2(n+1)}{n}$$

置換不変：最近の話

Ouyangが先導

理論整備（対称群の表現論の応用）

Integrating quantum sensors with bespoke quantum error correction

Lead Research Organisation: [University of Sheffield](#)

Department Name: Physics and Astronomy

[Go back](#)

[Overview](#) [Organisations](#) [People](#) [Publications](#)

Abstract

Physical quantities such as time, phase, and entanglement cannot be measured directly, but instead must be inferred through indirect measurements. An important category of such indirect measurements is parameter estimation. Ideal quantum sensors would estimate physical quantities with unprecedented precision, but practical quantum sensors lose their quantum advantage because of noise. Incorporating quantum error correction codes into quantum sensors is an attractive theoretical approach to reduce noise, but is beset with practical difficulties. Namely, most quantum error correction codes (1) cannot be readily prepared in actual physical systems, (2) would introduce more errors than they correct during imperfect quantum error correction, and (3) can destroy the signal meant to be measured during quantum error correction.

Most quantum error correction schemes are studied by abstracting away the physics of sensors, while quantum sensors are typically studied in the absence of quantum error correction. Mainstream approaches treat both quantum sensors and quantum error correction components as black boxes to be optimised separately. This project aims to break down the boundary between the quantum error correction black box and the quantum sensor black box, and integrate them to make an overall quantum error correction-integrated quantum sensor, by optimising over bespoke quantum error correction codes.

A critical problem that using bespoke quantum error correction codes in optimising quantum sensors can overcome is the intractability of current numerical approaches in optimising quantum error correction codes for quantum sensors. These numerical methods impose no a priori structure on quantum error correction codes, and suffer from a runtime that increases exponentially in the number of particles. By choosing bespoke quantum codes that can be described with a tractable number of parameters, quantum sensors can be

Funded Value:

£1,115,797

Funded Period:

3月 23 - 3月 28

Funder:

EPSRC

Project Status:

Active

Project Category:

Fellowship

Project Reference:

EP/W028115/1

Principal Investigator:

[Yingkai Ouyang](#)

カナダの BTQ Technologies Corp.が
Ouyangと共同研究

The screenshot shows the Investing.com website interface. At the top, there is a search bar and navigation tabs for Markets, My Watchlist, Investing Challenges, Charts, News, Opinion, Technical, Brokers, and Tools. Below the navigation, there are sub-tabs for Latest, Most Popular, Forex, Commodities, Stock Markets, Economic Indicators, Economy, Politics News, World, Tech, and Ge. A dark purple banner contains the text: "B What patterns are forming in BTC? Try 'Analyze chart' button on BTC page". Below this, the stock price for BTQ is shown as -4.72% with a star icon. The main content area features a news article titled "VANCOUVER - BTQ Technologies Corp. (NASDAQ:BTQ) announced Wednesday that Chief Quantum Officer Dr. Gavin K. Brennen co-authored research introducing a general theory of quantum error correction for permutation-invariant codes, according to a press release statement." The article text continues: "The research, conducted with Macquarie University and Yingkai Ouyang from the University of Sheffield, presents what the authors describe as the first general theory of error correction for permutation-invariant codes. The paper, titled 'A theory of quantum error correction for permutation-invariant codes,' introduces algorithms designed to correct errors on permutation-invariant codes and presents methods for addressing certain erasure and deletion errors."



量子リード・ソロモン符号
交代サンドイッチ写像による
マーカーク的アプローチ

古典削除符号におけるマーカー

符号語

ビット
列

符号語

ビット
列

特定の
ビットパターンを
利用して
符号語に生じた
削除の有無を検出
削除の大きさを推測

マーカ－の発展： 交代サンドイッチ

ナ－ブな量子版マーカ－：符号語間に量子マーカ－



交代サンドイッチ：量子系間に量子マーカ－



交代サンドイッチのビット列 量子RS符号の活用 [H25, ISIT]



集めれば
量子RS符号語
/拡大体由来
i.e., それぞれ 2^E 次密度行列

$$|0^t 1^t\rangle(|0^t 1^t\rangle^*)$$

量子系と分離可能な
古典ビットとみなせる量子状態

$$E \text{ qubits} \simeq$$

交代サンドイッチと量子RS符号の効果 [H, ISIT25]

任意の正整数 t に対し

提案した構成方法は
 t 量子削除誤り訂正符号であり

符号長を伸ばせば
符号化率は 1 に収束

部分符号をとれば
任意の符号化率を
任意の精度で近似

Proposed Code



t: del error upper limit
E: RS parameter (any pos. int.)
#Info Qubits: $E(2^E - 1 - 2t)$
Code Length: $(E + 2t)(2^E - 1)$
Rate $\rightarrow 1$ if $E \rightarrow \infty$

This idea works not only quantum but also classical.

さらに最近

arXiv > cs > arXiv:2605.11510

Help | A

Computer Science > Information Theory

[Submitted on 12 May 2026]

Decoding Algorithm to Composite Errors Consisting of Deletions and Insertions for Quantum Deletion-Correcting Codes Based on Quantum Reed-Solomon Codes

[Koki Sasaki](#), [Ken Nakamura](#), [Takayuki Nozaki](#)

This paper focuses on Hagiwara codes, which are quantum deletion-correcting codes constructed by the quantum Reed-Solomon codes. Although Hagiwara codes can correct composite errors consisting of deletions and insertions, an efficient decoding algorithm to such errors remains an open problem. In this paper, we provide a decoding algorithm to such errors for Hagiwara codes.

量子削除と量子挿入



問い

- ・ 量子 + 削除誤り訂正符号
- ・ 量子 + 挿入誤り訂正符号
- ・ 量子 s 削除 & r 挿入 混合誤り訂正符号 ($t = s+r$)

これらに関係があるか？

量子でなければ 符号 を固定したとき

- ・ 古典 + 削除誤り訂正可能
- ・ 古典 + 挿入誤り訂正可能
- ・ 古典 s 削除 & r 挿入 混合誤り訂正可能 ($t = s+r$)

これらが同値

最近の進展

Computer Science > Information Theory

[Submitted on 24 Feb 2026 (v1), last revised 12 May 2026 (this version, v2)]

Insertion Correcting Capability for Quantum Deletion-Correcting Codes

Ken Nakamura, Takayuki Nozaki

This paper proves that any quantum t -deletion-correcting codes also correct a total of t insertion and deletion errors under a certain condition. Here, this condition is that a set of quantum states is defined as a quantum error-correcting code if the error spheres of its states are disjoint, as classical coding theory. In addition, this paper proposes the quantum indel distance and describes insertion and deletion errors correcting capability of quantum codes by this distance.

1. 量子状態 ρ, σ がどんな t 削除でも一致しない
2. 量子状態 ρ, σ がどんな t 挿入でも一致しない
3. 量子状態 ρ, σ がどんな t 混合でも一致しない

1 \Rightarrow 2 と 1 \Rightarrow 3 がわかった

2 \Rightarrow 1 は成り立たない

挿入訂正できても
削除訂正できない符号が見つかるかも

置換不変に限ると
削除と挿入は同値との報告が by Ouyang

忘れてました：削除の数学的記述

σ : n qubits とすれば、次で表わせる

$$\sigma = \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \{0,1\}^n} \sigma_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} |\mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{y}| \quad (11)$$

$$= \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \{0,1\}^n} \sigma_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} |x_1\rangle \langle y_1| \otimes \cdots \otimes |x_n\rangle \langle y_n|. \quad (12)$$

Here, $\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_n$, $\mathbf{y} = y_1, y_2, \dots, y_n$, and $\sigma_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \in \mathbb{C}$.

i 番目量子系削除後の状態

$$\begin{aligned} \text{Tr}_i(\sigma) := & \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \{0,1\}^n} \sigma_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \cdot \text{Tr}(|x_i\rangle \langle y_i|) |x_1\rangle \langle y_1| \otimes \\ & \cdots \otimes |x_{i-1}\rangle \langle y_{i-1}| \otimes |x_{i+1}\rangle \langle y_{i+1}| \otimes \\ & \cdots \otimes |x_n\rangle \langle y_n|, \end{aligned}$$



まだまだ知りたい

小さな例で
探ってみる

問い

削除誤り数 t を固定した時

置換不変符号の符号化率 $<$ そうでない符号の符号化率
と差が生じる符号長のタイミングは？

$t = 1$ とか

問い

削除誤り数 t を固定した時

誤り訂正可能な
最短の符号長は？

$t=2$ とか3とか

おしまい

