2018 年 電子情報通信学会ソサイエティ大会
AT-1 Age of Information — 情報の「鮮度」に関する最近の研究動向 —

AoI と待ち行列モデル: 標本路解析とその応用

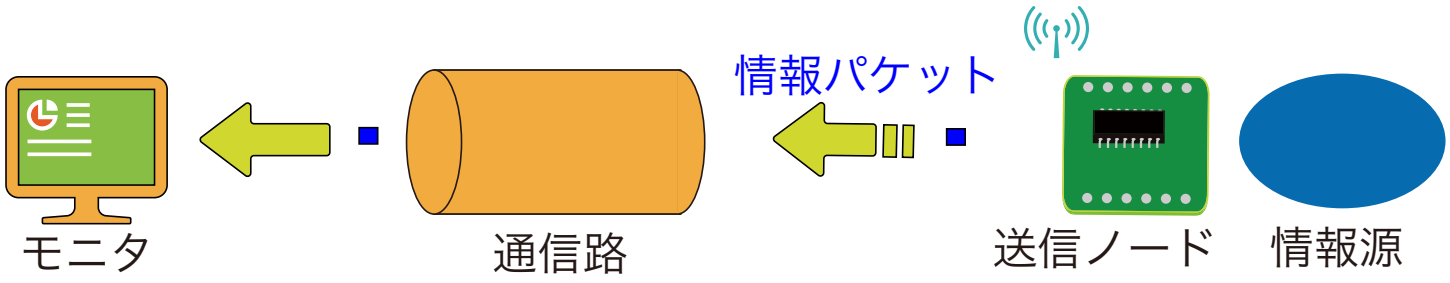
*井上 文彰, 滝根 哲哉

大阪大学大学院工学研究科

※本講演の内容は, 田中利幸 教授 (京都大学)
増山博之 准教授 (京都大学) との共同研究に基づく

情報更新システム

時間変化する情報源を遠隔地からモニタリング



- 送信ノード
  - 情報源をサンプリングし，得られたサンプルをモニタに送信
- 受信ノード (モニタ)
  - 送信ノードから受信した最新の情報を画面に表示

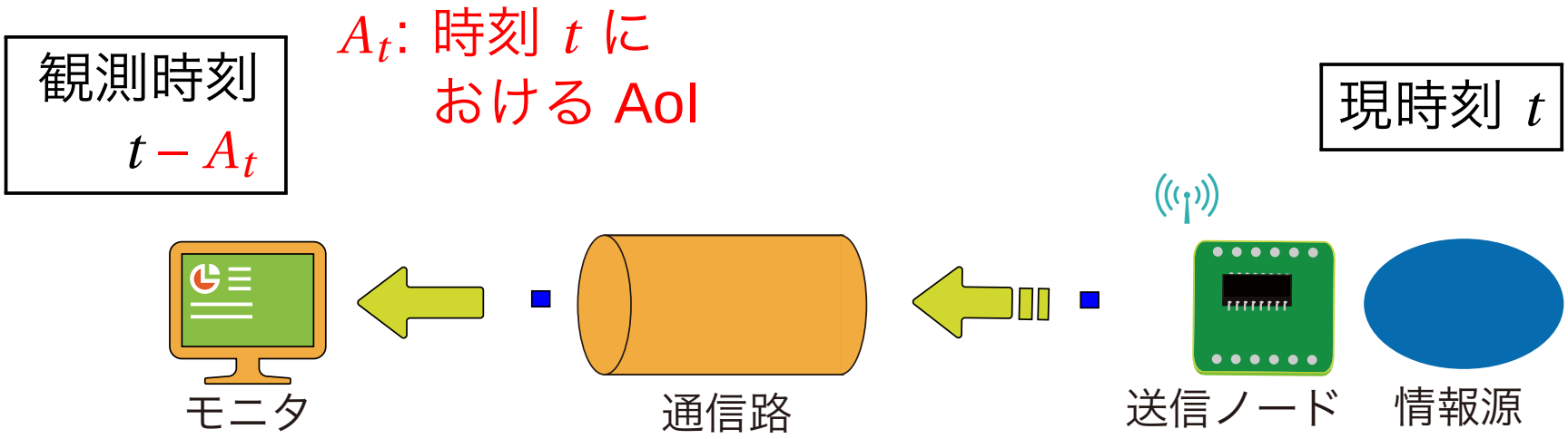
モニタに表示されている情報は「過去」のもの

➡ 現在の情報源の状態に関して，部分的な情報しか得られない

Age of Information (AoI)

- AoI: モニタに表示中である情報の，観測時点からの経過時間
- 待ち行列モデルを用いた AoI の定式化
  - 通信路を待ち行列システムとみなす
  - パケットの生成間隔や伝送時間が，確率的に分布すると仮定

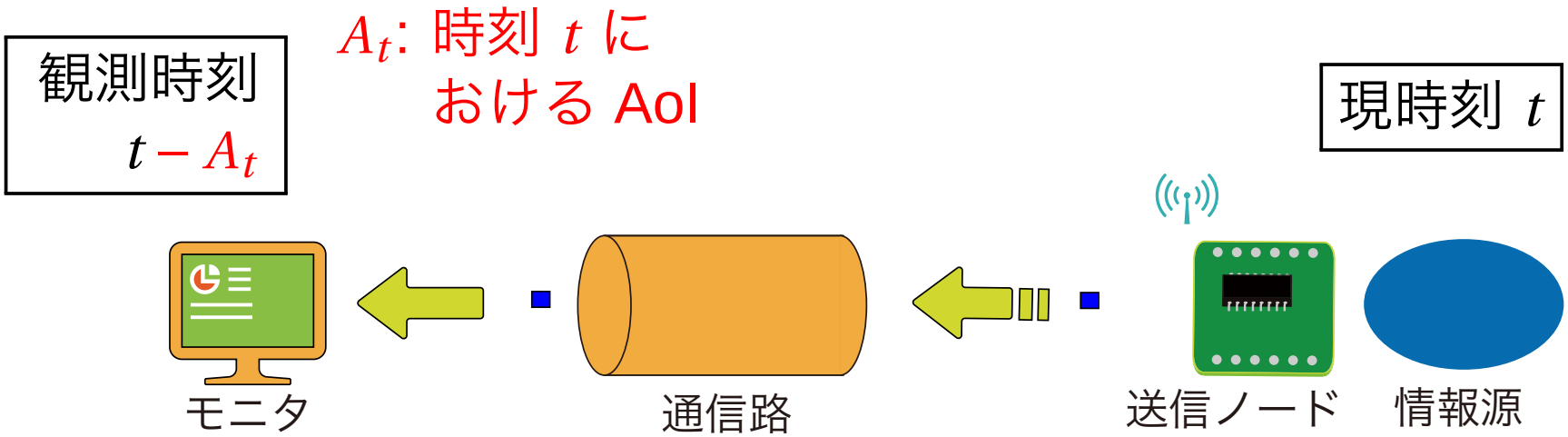
AoI は，連続時間の確率過程として定式化される



Age of Information (AoI)

- AoI: モニタに表示中である情報の，観測時点からの経過時間
- 待ち行列モデルを用いた AoI の定式化
  - 通信路を待ち行列システムとみなす
  - パケットの生成間隔や伝送時間が，確率的に分布すると仮定

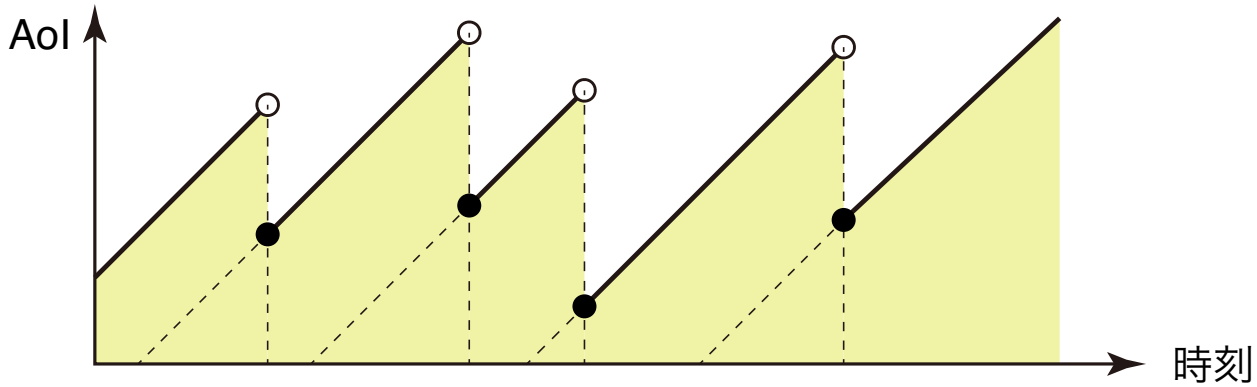
➡ AoI は，連続時間の確率過程として定式化される



平均 AoI

- 先行研究の大半は，AoI の時間平均 $\mathrm{E}[A]$ のみを考察

$$\mathrm{E}[A] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T A_t \mathrm{d}t$$



- 平均 AoI の公式 [1]

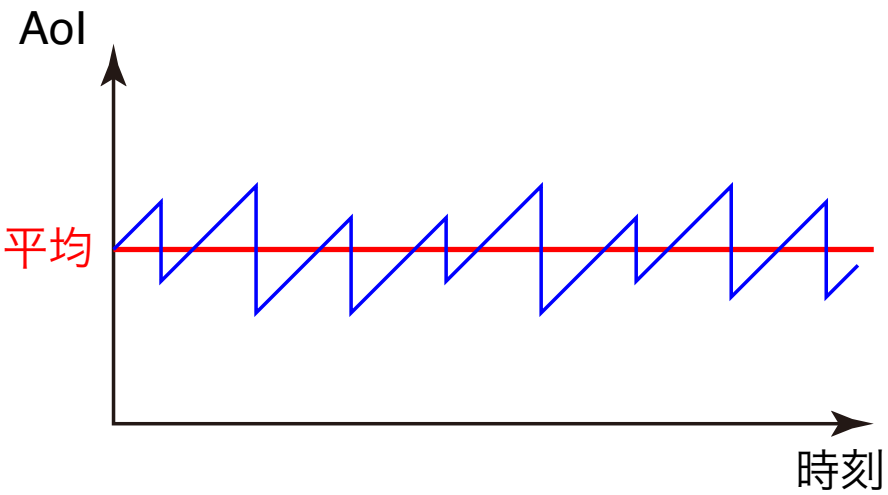
$$\mathrm{E}[A] = \frac{\dfrac{\mathrm{E}[G^2]}{2} + \mathrm{E}[G_n D_n]}{\mathrm{E}[G]}$$

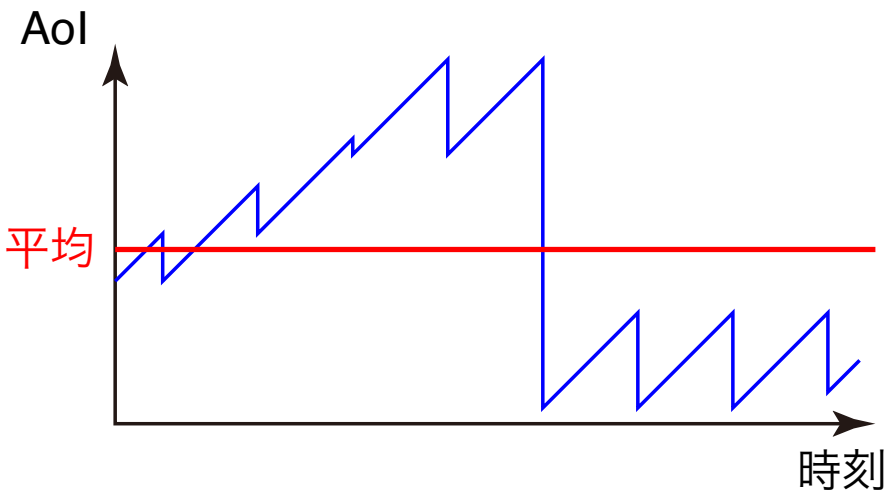
G: サンプリング間隔
$\mathrm{E}[G_n D_n]$: サンプリング間隔と遅延時間の積の期待値

[1] S. Kaul et al., IEEE INFOCOM 2012.

本研究の動機: AoI の確率分布 (1)

- 時間平均 $\mathrm{E}[A]$ は AoI に関する主要な性能指標であるが，
  AoI 過程の挙動を特徴付けるには十分でない
  - 特に，平均からの偏差を評価できない





- AoI の詳細な特徴付けには，確率分布 $A(x)$ に関する考察が必要

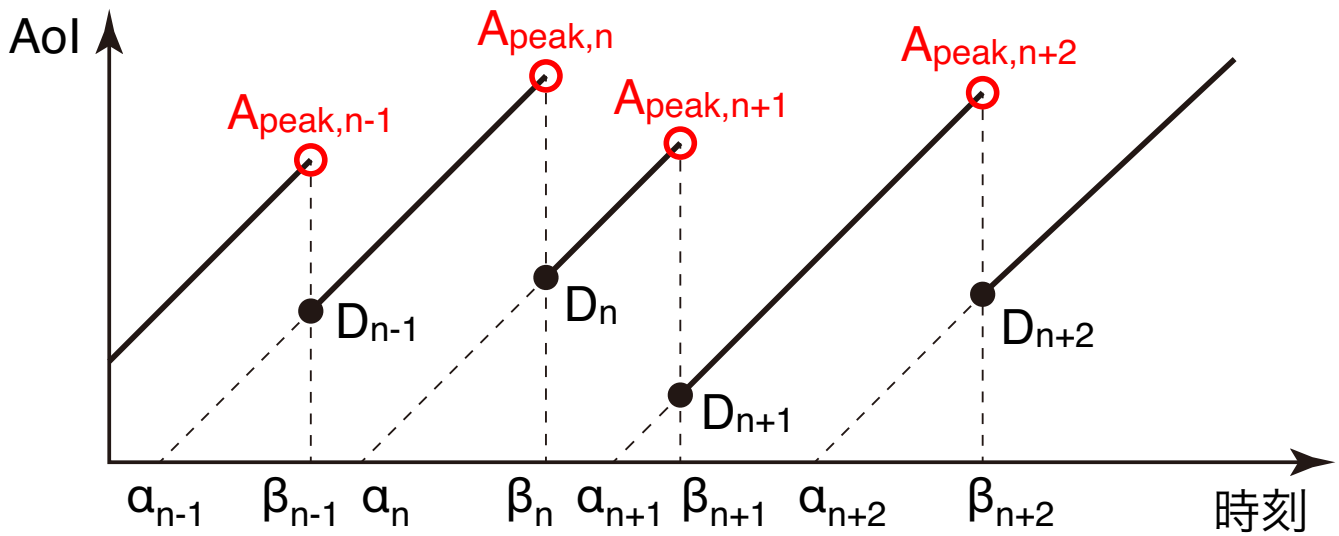
$A(x)$ $(x \geq 0)$: AoI が x 以下に留まっている時間割合

本研究の動機: AoI の確率分布 (2)

- ピーク AoI については確率分布の解析が比較的容易 [3]
  (≜ 情報更新の直前における AoI)

$$A_{\mathrm{peak},n+1} = D_n + (\beta_{n+1} - \beta_n)$$

D_n: n 番目の情報パケットの遅延
β_n: n 番目の情報パケットの配信完了時刻



[3] M. Costa et al., IEEE Trans. Inf. Theory, 62, 2016.

本研究の概要

- 幅広い状況下で AoI の確率分布 $A(x)$ が満たす不変式を導出:

$$A(x) = \frac{1}{\mathrm{E}[G]} \int_0^x \big(D(y) - A_{\mathrm{peak}}(y)\big)\,\mathrm{d}y$$

$D(x)$: 遅延時間分布，　$A_{\mathrm{peak}}(x)$: ピーク AoI 分布

- さらに，この不変式から $\mathrm{E}[A]$ に関する代替公式を得る
- 上記の結果の応用として，一般の先着順処理 GI/GI/1 を考察
  - AoI の分布は，遅延時間の分布を用いて与えられる
- 最後に，GI/GI/1 を特別化したモデルを考察
  - M/GI/1，GI/M/1，ならびにそれらの特別な場合

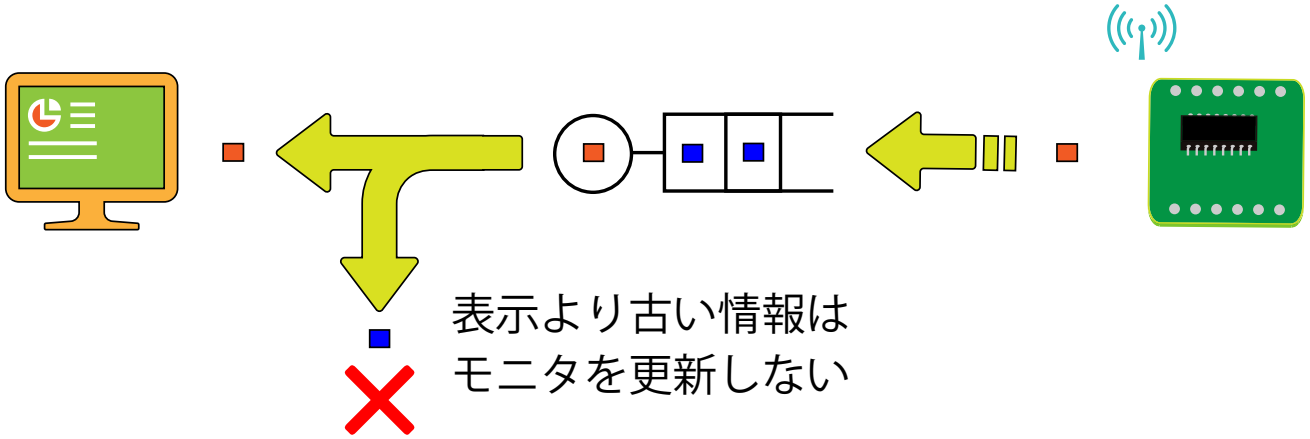
AoI の分布が満たす不変式

情報パケットの分類

- 一般に，情報更新システムには二種類のパケットが存在
  - 更新パケット: モニタの情報を更新する新しいパケット
  - 非更新パケット: モニタの情報よりも古いパケット

(例 1) 先着順で伝送 ➡ パケットは全て更新パケット

(例 2) 後着順で伝送 ➡ 更新パケットと非更新パケットが混在



特に，更新パケットのみに注目すると常に FIFO (First-In-First-Out)

情報更新システムの定式化

システムの一つの標本路に注目 (確定的なモデル)

- 更新パケットの到着・離脱時刻の系列としてシステムを定式化

  α_n $(n = 0, 1 \ldots)$: n 番目の更新パケットの到着時刻

  β_n $(n = 0, 1 \ldots)$: n 番目の更新パケットの離脱時刻

  ※ これらはただの数列であり，確率変数列ではない

- α_n と β_n について以下のことを仮定

  (i) $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$ (パケットには到着順に番号を付す)

  (ii) $\alpha_n \leq \beta_n$ (パケットの離脱は到着より後に起こる)

  (iii) $\beta_n \leq \beta_{n+1}$ (パケットの離脱順序は FIFO)

  (iv) $\alpha_0 \leq \beta_0 = 0 < \alpha_1$ (時刻 0 に最初のパケットが離脱し，空になる)

AoI とピーク AoI (1)

α_n, β_n: n 番目の更新パケットの到着，離脱時刻

- M_t: 時刻 t までの累積離脱数
  (= 最後に離脱したパケットの番号)

$$M_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}\{\beta_n \le t\}$$

$$\boxed{\mathbb{1}\{X\} = \begin{cases} 1, & X \text{ が真} \\ 0, & X \text{ が偽} \end{cases}}$$

- A_t: 時刻 t における AoI

$$A_t = t - \alpha_{M_t}$$ (= 現時刻 − 表示中の情報の到着時刻)

- $A_{\mathrm{peak},n}$: n 番目のピーク AoI

$$A_{\mathrm{peak},n} = \lim_{\Delta t \to 0+} A_{\beta_n - \Delta t}$$ (= n 番目の離脱が起こる直前の AoI)

AoI とピーク AoI (2)

α_n, β_n: n 番目の更新パケットの到着，離脱時刻

A_t: 時刻 t における AoI,　　$A_{\mathrm{peak},n}$: n 番目のピーク AoI

- $A_t = t - \alpha_{M_t}$　(= 現時刻 − 表示中の情報の到着時刻)
- $A_{\mathrm{peak},n} = \lim_{\Delta t \to 0+} A_{\beta_n - \Delta t}$

  $= \beta_n - \alpha_{n-1}$　(= 離脱時刻 − 表示中の情報の到着時刻)

  $= (\beta_n - \alpha_n) + (\alpha_n - \alpha_{n-1})$

  $= D_n + G_n$

  - D_n: n 番目のパケットの遅延時間
  - G_n: n 番目と $n-1$ 番目のパケットの到着間隔

標本路上の経験分布関数

A_t: 時刻 t における AoI,　　$A_{\mathrm{peak},n}$: n 番目のピーク AoI

D_n: n 番目のパケットの遅延時間

- $A^\sharp(x) \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{1}\{A_t \le x\}\,dt$　　($A_t \le x$ となる時間割合)
- $A^\sharp_{\mathrm{peak}}(x) \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}\left\{A_{\mathrm{peak},n} \le x\right\}$　　($A_{\mathrm{peak},n} \le x$ となる個数割合)
- $D^\sharp(x) \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}\{D_n \le x\}$　　($D_n \le x$ となる個数割合)

以降では，これら三つの極限の存在を仮定

AoI が満たす不変式

$A^\sharp(x)$: AoI の経験分布, $A^\sharp_{\mathrm{peak},n}(x)$: ピーク AoI の経験分布
$D^\sharp(x)$: 遅延時間の経験分布

- 仮定 1: パケットの到着率 λ は有限かつ非零の値を取る

$$\lambda \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}\{\alpha_n \le T\} \in (0,\infty)$$

- 仮定 2: システムは安定である

$$\underbrace{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}\{\beta_n \le T\}}_{\text{離脱率}} = \underbrace{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}\{\alpha_n \le T\}}_{\text{到着率}} \quad (=\lambda)$$

これらの仮定の下, $A^\sharp(x)$ と $A^\sharp_{\mathrm{peak}}(x)$ および $D^\sharp(x)$ の間に次式が成立

$$A^\sharp(x) = \lambda \int_0^x \left(D^\sharp(y) - A^\sharp_{\mathrm{peak}}(y)\right) \mathrm{d}y$$

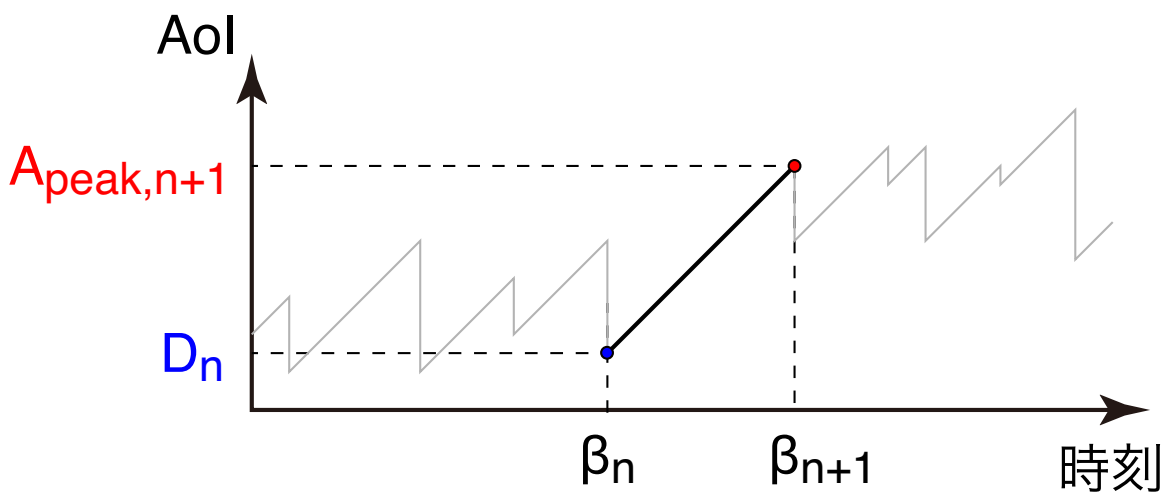
証明の概略 (1)

n 番目と $n+1$ 番目の離脱の間 $[\beta_n, \beta_{n+1})$ に注目

- パケットの離脱直後における AoI は遅延時間 D_n に等しい

➡ AoI は D_n から $A_{\mathrm{peak},n+1}$ まで傾き 1 で線形に増加

$$\boxed{\int_{\beta_n}^{\beta_{n+1}} \mathbb{1}\{A_t \le x\}\,\mathrm{d}t = \int_{D_n}^{A_{\mathrm{peak},n+1}} \mathbb{1}\{u \le x\}\,\mathrm{d}u}$$



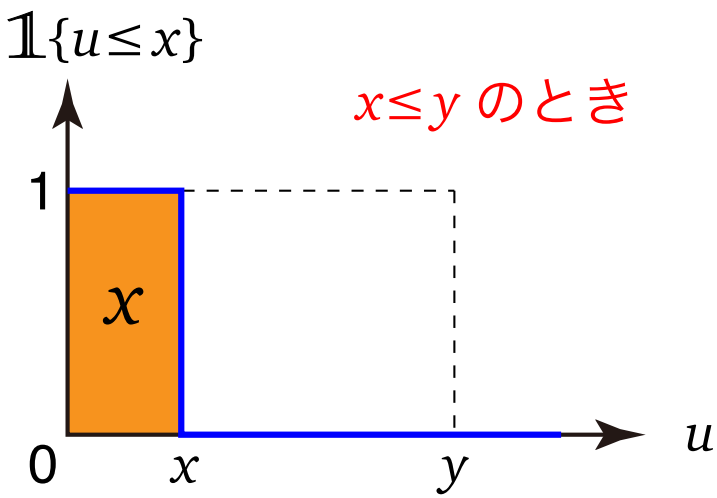
証明の概略 (2)

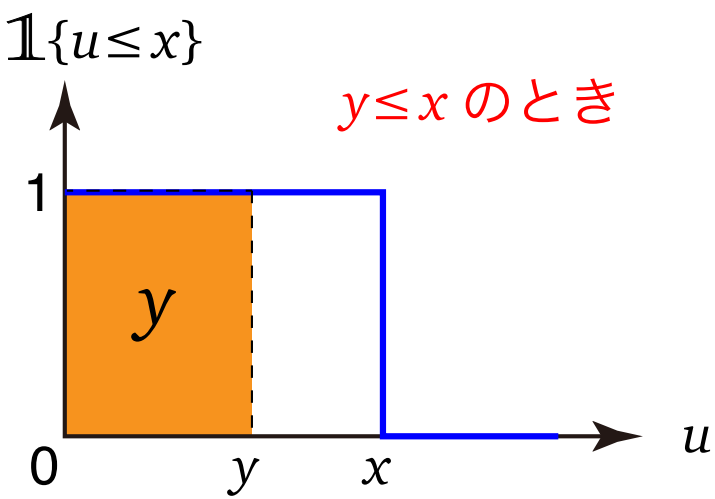
$$\int_{\beta_n}^{\beta_{n+1}} \mathbb{1}\{A_t \le x\}\,\mathrm{d}t = \int_{D_n}^{A_{\mathrm{peak},n+1}} \mathbb{1}\{u \le x\}\,\mathrm{d}u$$

$$= \int_0^{A_{\mathrm{peak},n+1}} \mathbb{1}\{u \le x\}\,\mathrm{d}u - \int_0^{D_n} \mathbb{1}\{u \le x\}\,\mathrm{d}u$$

- 任意の $x \ge 0,\ y \ge 0$ に対し，次の恒等式が成立

$$\int_0^{y} \mathbb{1}\{u \le x\}\,\mathrm{d}u = \min(x, y) = \int_0^{x} \mathbb{1}\{u \le y\}\,\mathrm{d}u$$





証明の概略 (2)

$$\int_{\beta_n}^{\beta_{n+1}} \mathbb{1}\{A_t \le x\}\,\mathrm{d}t = \int_{D_n}^{A_{\mathrm{peak},n+1}} \mathbb{1}\{u \le x\}\,\mathrm{d}u$$
$$= \int_0^{A_{\mathrm{peak},n+1}} \mathbb{1}\{u \le x\}\,\mathrm{d}u - \int_0^{D_n} \mathbb{1}\{u \le x\}\,\mathrm{d}u$$

- 任意の $x \ge 0,\ y \ge 0$ に対し，次の恒等式が成立

$$\int_0^{y} \mathbb{1}\{u \le x\}\,\mathrm{d}u = \min(x, y) = \int_0^{x} \mathbb{1}\{u \le y\}\,\mathrm{d}u$$
$$= \int_0^{x} \left(1 - \mathbb{1}\{y \le u\}\right)\mathrm{d}u$$

証明の概略 (2)

$$\int_{\beta_n}^{\beta_{n+1}} \mathbb{1}\{A_t \le x\}\,\mathrm{d}t = \int_{D_n}^{A_{\mathrm{peak},n+1}} \mathbb{1}\{u \le x\}\,\mathrm{d}u$$
$$= \int_0^{A_{\mathrm{peak},n+1}} \mathbb{1}\{u \le x\}\,\mathrm{d}u - \int_0^{D_n} \mathbb{1}\{u \le x\}\,\mathrm{d}u$$

- 任意の $x \ge 0$, $y \ge 0$ に対し，次の恒等式が成立

$$\int_0^{y} \mathbb{1}\{u \le x\}\,\mathrm{d}u = \min(x, y) = \int_0^{x} \mathbb{1}\{u \le y\}\,\mathrm{d}u$$
$$= \int_0^{x} \left(1 - \mathbb{1}\{y \le u\}\right)\mathrm{d}u$$

したがって，次式を得る

$$\int_{\beta_n}^{\beta_{n+1}} \mathbb{1}\{A_t \le x\}\,\mathrm{d}t = \int_0^{x} \mathbb{1}\{D_n \le u\}\,\mathrm{d}u - \int_0^{x} \mathbb{1}\{A_{\mathrm{peak},n+1} \le u\}\,\mathrm{d}u$$

証明の概略 (3)

$$\int_{\beta_n}^{\beta_{n+1}} \mathbb{1}\{A_t \le x\}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \mathbb{1}\{D_n \le u\}\,\mathrm{d}u - \int_0^x \mathbb{1}\left\{A_{\mathrm{peak},n+1} \le u\right\}\mathrm{d}u$$

- 以上より，AoI の分布 $A^\sharp(x)$ は次式で与えられる

$$\begin{aligned}
A^\sharp(x) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{1}\{A_t \le x\}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{n=0}^{M_T}\int_{\beta_n}^{\beta_{n+1}} \mathbb{1}\{A_t \le x\}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{M_T}{T}\cdot\frac{1}{M_T}\sum_{n=0}^{M_T}\left[\int_0^x \mathbb{1}\{D_n \le u\}\,\mathrm{d}u - \int_0^x \mathbb{1}\left\{A_{\mathrm{peak},n+1} \le u\right\}\mathrm{d}u\right] \\
&= \lambda\int_0^x \left(D^\sharp(y) - A^\sharp_{\mathrm{peak}}(y)\right)\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

M_t: 時刻 t までの累積離脱数，　λ: パケットの到着率

AoI が満たす不変式 (まとめ)

- 更新パケットの到着時刻 $\{\alpha_n\}_{n=0,1,\ldots}$ と 離脱時刻 $\{\beta_n\}_{n=0,1,\ldots}$
  - 確定的な数値の列として与えられているとする
- $\{\alpha_n\}_{n=0,1,\ldots}$ と $\{\beta_n\}_{n=0,1,\ldots}$ が満たすべき条件
  - 仮定 0: 経験分布 $A^\sharp(x)$, $A^\sharp_{\mathrm{peak}}(x)$, $D^\sharp(x)$ が各 $x \geq 0$ で存在
  - 仮定 1: パケットの到着率 λ は有限かつ非零の値を取る
  - 仮定 2: システムは安定である

➡ このとき，$A^\sharp(x) = \lambda \int_0^x \left(D^\sharp(y) - A^\sharp_{\mathrm{peak}}(y) \right) \mathrm{d}y$ が成立

次に，システムが確率モデルである場合を考える

- 上記の結果は標本路ごとに成立

定常性とエルゴード性

$$A^\sharp(x) = \lambda \int_0^x \left(D^\sharp(y) - A^\sharp_{\mathrm{peak}}(y) \right) \mathrm{d}y$$ は任意の標本路で成立

以降では，システムは定常かつエルゴード的であると仮定

- 定常: システム状態を表す確率分布は時刻に依存せず一定
  - この時間不変な分布を定常分布と呼ぶ
- エルゴード的: 任意の標本路上の経験分布が定常分布に一致
  - ➡ $A^\sharp(x) = A(x)$, $A^\sharp_{\mathrm{peak}}(x) = A_{\mathrm{peak}}(x)$, かつ $D^\sharp(x) = D(x)$ が成立

$A(x)$: AoI の定常分布

$A_{\mathrm{peak}}(x)$: ピーク AoI の定常分布

$D(x)$: 遅延時間の定常分布

確率分布に関する記法

以降では一貫して，次の記法を用いる

- 任意の非負確率分布関数 $F(x)$ $(x \geq 0)$ に対し，
  - F: 分布関数 $F(x)$ に従う確率変数

    $$\Pr(F \leq x) = F(x)$$

  - $f(x)$: $F(x)$ に対応する確率密度関数 (存在するとき)

    $$f(x) = \frac{d}{dx}F(x), \quad x \geq 0$$

  - $f^*(s)$: $F(x)$ のラプラス・スティスチェス変換 (LST)

    $$f^*(s) = \mathrm{E}\left[e^{-sF}\right] = \int_0^\infty e^{-sx}\mathrm{d}F(x), \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$

※ LST と確率分布は 1 対 1 対応し，相互に変換可能

ラプラス・スティスチェス変換 (LST)

- $f^*(s)$: $F(x)$ のラプラス・スティスチェス変換 (LST)

$$f^*(s) = \mathrm{E}\left[e^{-sF}\right] = \int_0^\infty e^{-sx}\mathrm{d}F(x), \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$

※ LST と確率分布は 1 対 1 対応し，相互に変換可能

- $\mathrm{d}F(x)$ の意味

$$\mathrm{d}F(x) \simeq F(x+\mathrm{d}x) - F(x) = \Pr(x < F \leq x + \mathrm{d}x)$$

  - 密度関数 $f(x)$ が存在するとき $\mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x$

- LST の代表的性質
  - F と G が独立 ➡ $\mathrm{E}[e^{-s(F+G)}] = \mathrm{E}[e^{-sF}]\mathrm{E}[e^{-sG}] = f^*(s)g^*(s)$
  - k 次モーメント $\mathrm{E}[F^k] = (-1)^k \lim_{s\to 0+} \dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k} f^*(s)$

AoI の定常分布が満たす不変式

$A(x)$: AoI の定常分布

$A_{\text{peak}}(x)$: ピーク AoI の定常分布, $D(x)$: 遅延時間の定常分布

- AoI の定常分布の密度関数

$$a(x) = \frac{D(x) - A_{\text{peak}}(x)}{\mathrm{E}[G]}, \quad x \geq 0$$

- AoI の定常分布の LST

$$a^*(s) = \frac{d^*(s) - a^*_{\text{peak}}(s)}{s\mathrm{E}[G]}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$

- AoI の定常分布の k 次モーメント ($k = 1, 2, \ldots$)

$$\mathrm{E}[A^k] = \frac{\mathrm{E}[(A_{\text{peak}})^{k+1}] - \mathrm{E}[D^{k+1}]}{(k+1)\mathrm{E}[G]}$$

平均 AoI の公式

- 平均 AoI $\mathrm{E}[A]$ の公式 [1]

$$\text{(i)}\quad \mathrm{E}[A] = \frac{\dfrac{\mathrm{E}[G^2]}{2} + \mathrm{E}[G_n D_n]}{\mathrm{E}[G]}$$

- 前述の結果から，$\mathrm{E}[A]$ の代替公式を得る

$$\text{(ii)}\quad \mathrm{E}[A] = \frac{E[(A_{\mathrm{peak}})^2] - \mathrm{E}[D^2]}{2\mathrm{E}[G]}$$

$$\text{(iii)}\quad \mathrm{E}[A] = \lim_{s \to 0+} (-1) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[a^*(s)\right], \qquad a^*(s) = \frac{d^*(s) - a^*_{\mathrm{peak}}(s)}{s\mathrm{E}[G]}$$

[1] S. Kaul et al., IEEE INFOCOM 2012.

AoI の定常分布が満たす不変式 (再掲)

- AoI の分布は，遅延時間 と ピーク AoI の分布から求められる

$$A(x) = \lambda \int_0^x \left(D(y) - A_{\mathrm{peak}}(y)\right) \mathrm{d}y$$

  - 遅延時間は，従来の待ち行列理論で幅広く取り扱われている
  - ピーク AoI については，個別の解析が必要

以下では，単一サーバ先着順処理待ち行列を考察

- GI/GI/1 での ピーク AoI の分布を遅延時間分布を用いて表現
  - ➡ AoI 分布は遅延時間分布を用いて与えられる
- この結果を M/GI/1 と GI/M/1 に適用
  - 遅延時間分布に関する既知の結果が利用可能

単一サーバ先着順処理システムへの応用

GI/GI/1 待ち行列モデル

- パケットの到着間隔は独立かつ同一に分布
  - $G(x)$: 到着間隔が従う分布関数
  - $\mathrm{E}[G]$: 平均到着間隔　($\Rightarrow \lambda = 1/\mathrm{E}[G]$ が成立)
- 各パケットのサービス時間は独立かつ同一に分布
  - $H(x)$: サービス時間が従う分布関数
  - $\mathrm{E}[H]$: 平均処理時間
- 以降では，安定性条件 $\rho < 1$ を仮定

  ただし，$\rho \triangleq \lambda \mathrm{E}[H]$ はトラヒック強度を表す

ピーク AoI の分布

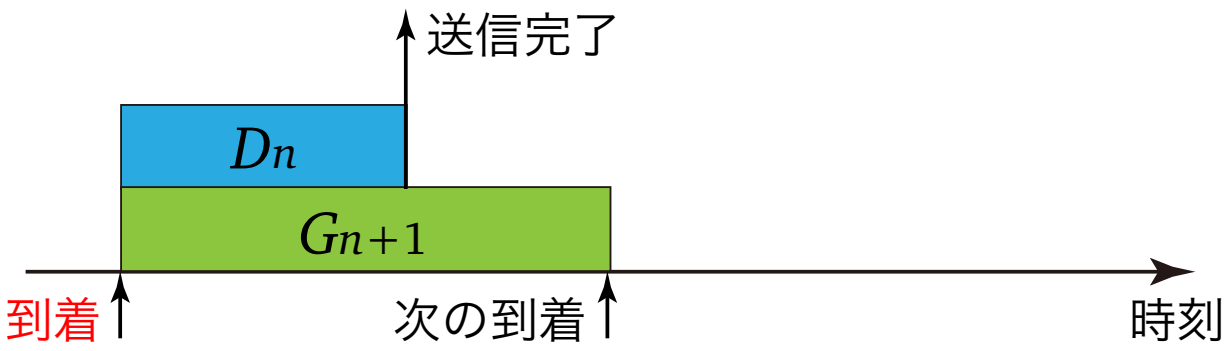
G_n: $n-1$ 番目と n 番目のパケットの到着間隔

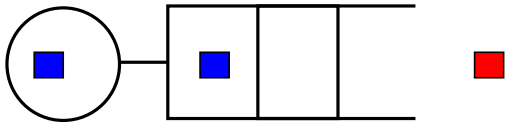
H_n: n 番目のパケットの処理時間

D_n: n 番目のパケットの遅延時間

- $G_{n+1} > D_n$ の場合 (パケットの離脱直後にシステムが空)

$$A_{\mathrm{peak},n+1} = G_{n+1} + H_{n+1}$$





ピーク AoI の分布

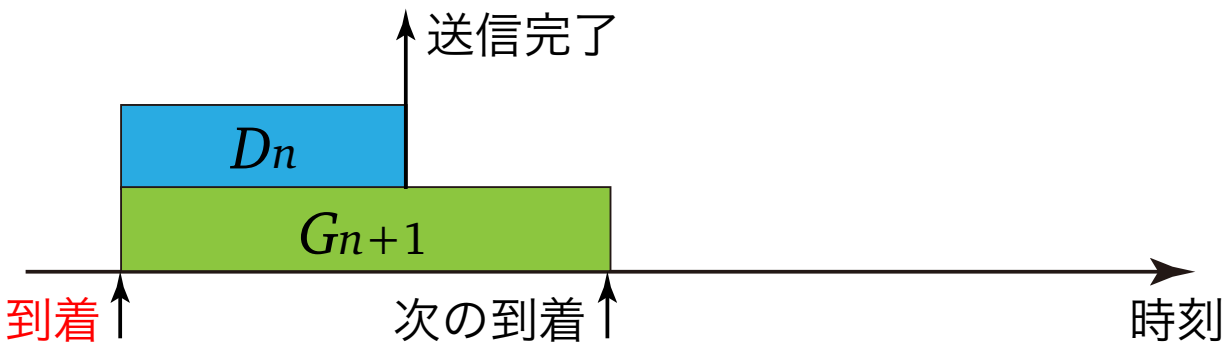
G_n: $n-1$ 番目と n 番目のパケットの到着間隔

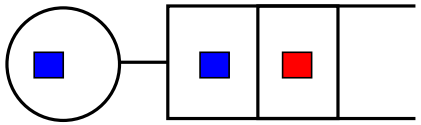
H_n: n 番目のパケットの処理時間

D_n: n 番目のパケットの遅延時間

- $G_{n+1} > D_n$ の場合 (パケットの離脱直後にシステムが空)

$$A_{\mathrm{peak},n+1} = G_{n+1} + H_{n+1}$$





ピーク AoI の分布

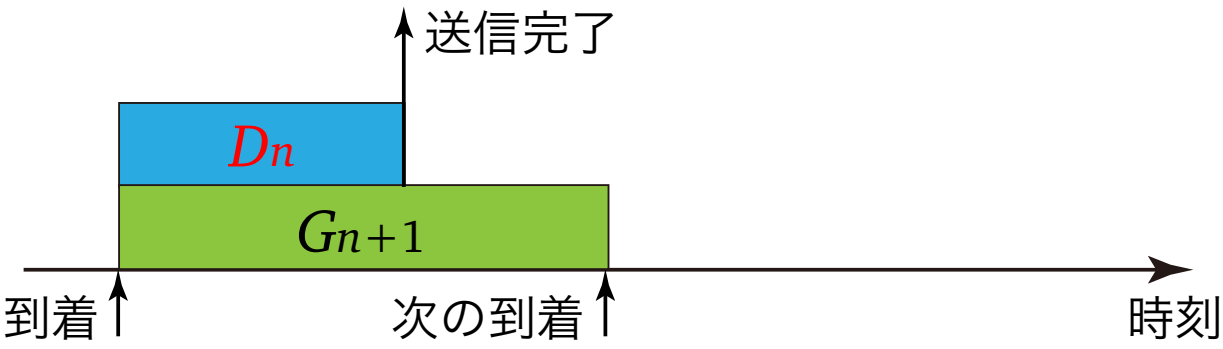
G_n: $n-1$ 番目と n 番目のパケットの到着間隔

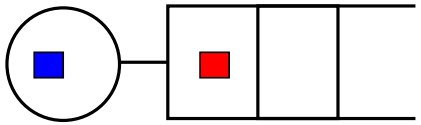
H_n: n 番目のパケットの処理時間

D_n: n 番目のパケットの遅延時間

- $G_{n+1} > D_n$ の場合 (パケットの離脱直後にシステムが空)

$$A_{\mathrm{peak},n+1} = G_{n+1} + H_{n+1}$$





ピーク AoI の分布

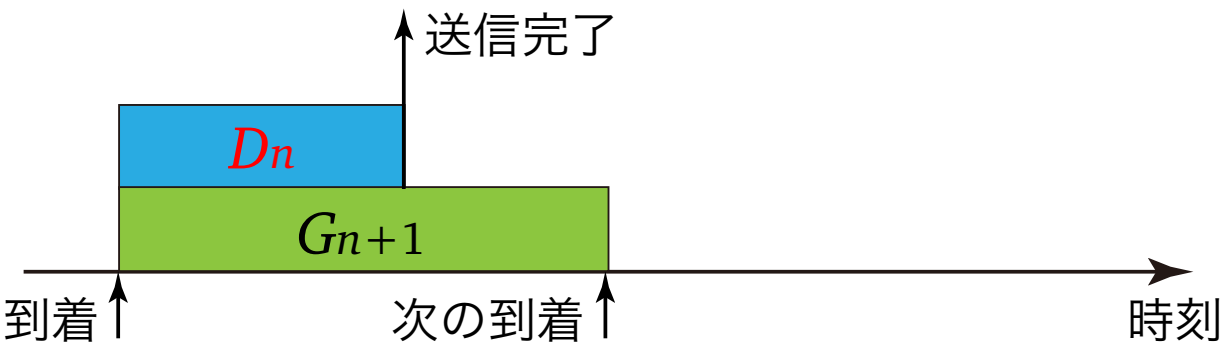
G_n: $n-1$ 番目と n 番目のパケットの到着間隔

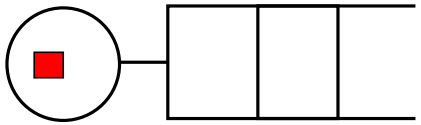
H_n: n 番目のパケットの処理時間

D_n: n 番目のパケットの遅延時間

- $G_{n+1} > D_n$ の場合 (パケットの離脱直後にシステムが空)

$$A_{\mathrm{peak},n+1} = G_{n+1} + H_{n+1}$$





ピーク AoI の分布

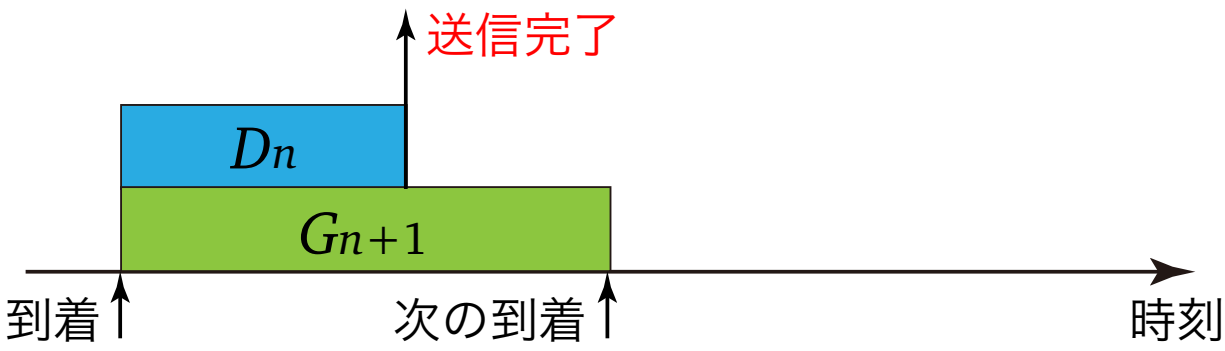
G_n: $n-1$ 番目と n 番目のパケットの到着間隔

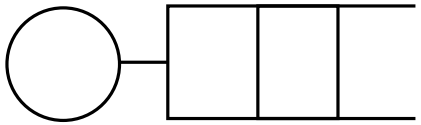
H_n: n 番目のパケットの処理時間

D_n: n 番目のパケットの遅延時間

- $G_{n+1} > D_n$ の場合 (パケットの離脱直後にシステムが空)

$$A_{\mathrm{peak},n+1} = G_{n+1} + H_{n+1}$$





ピーク AoI の分布

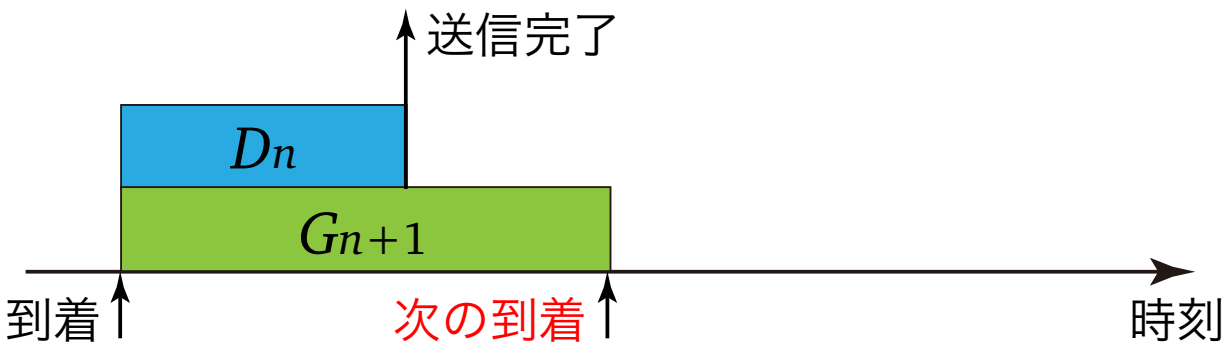
G_n: $n-1$ 番目と n 番目のパケットの到着間隔

H_n: n 番目のパケットの処理時間

D_n: n 番目のパケットの遅延時間

- $G_{n+1} > D_n$ の場合 (パケットの離脱直後にシステムが空)

$$A_{\mathrm{peak},n+1} = G_{n+1} + H_{n+1}$$



ピーク AoI の分布

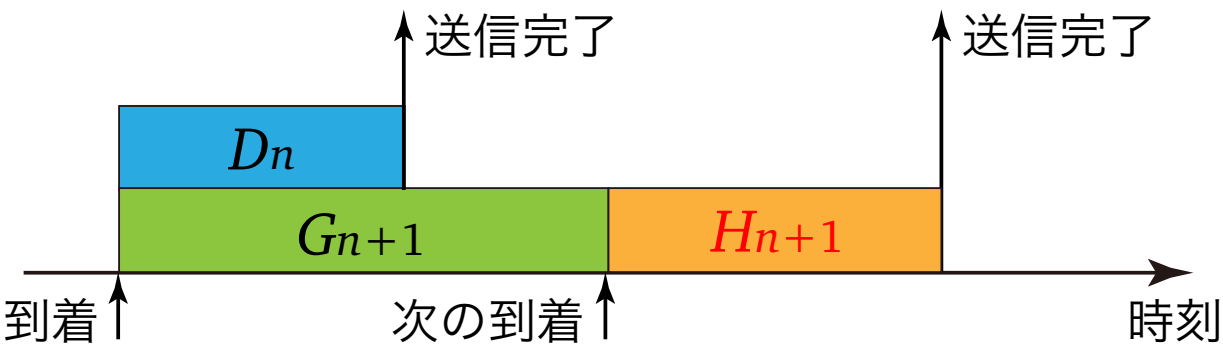
G_n: $n-1$ 番目と n 番目のパケットの到着間隔

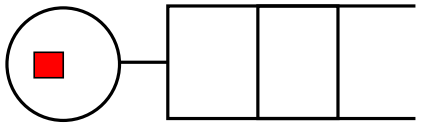
H_n: n 番目のパケットの処理時間

D_n: n 番目のパケットの遅延時間

- $G_{n+1} > D_n$ の場合 (パケットの離脱直後にシステムが空)

$$A_{\mathrm{peak},n+1} = G_{n+1} + H_{n+1}$$





ピーク AoI の分布

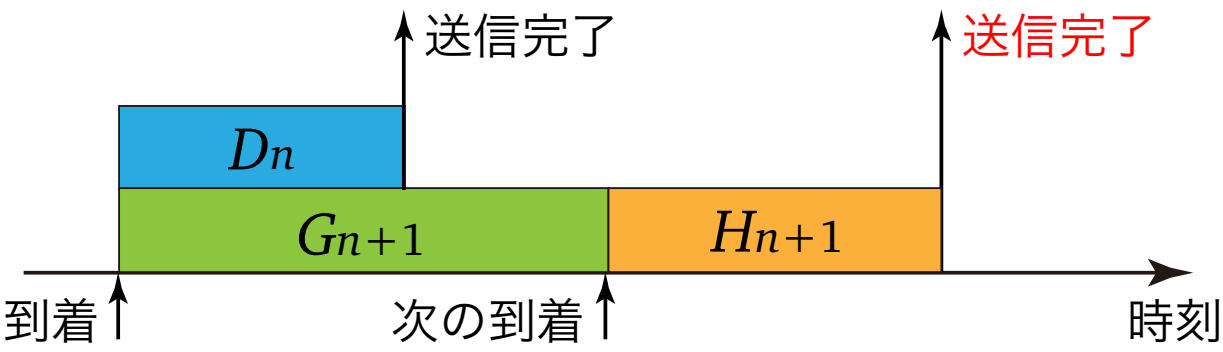
G_n: $n-1$ 番目と n 番目のパケットの到着間隔

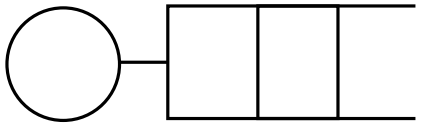
H_n: n 番目のパケットの処理時間

D_n: n 番目のパケットの遅延時間

- $G_{n+1} > D_n$ の場合 (パケットの離脱直後にシステムが空)

$$A_{\mathrm{peak},n+1} = G_{n+1} + H_{n+1}$$





ピーク AoI の分布

G_n: $n-1$ 番目と n 番目のパケットの到着間隔

H_n: n 番目のパケットの処理時間

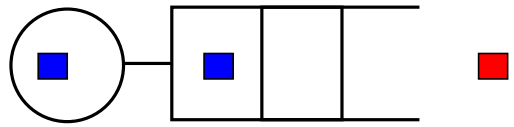
D_n: n 番目のパケットの遅延時間

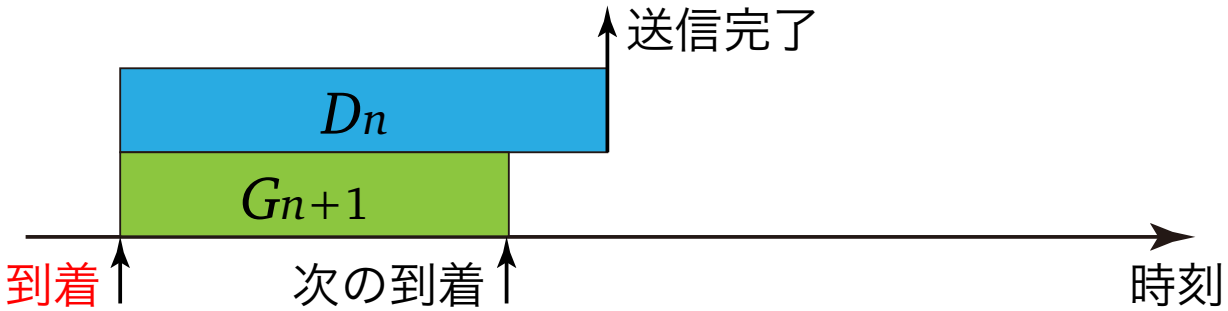
- $G_{n+1} > D_n$ の場合 (パケットの離脱直後にシステムが空)

$$A_{\mathrm{peak},n+1} = G_{n+1} + H_{n+1}$$

- $G_{n+1} \leq D_n$ の場合 (パケットの離脱直後に次の処理が開始)

$$A_{\mathrm{peak},n+1} = D_n + H_{n+1}$$





ピーク AoI の分布

G_n: $n-1$ 番目と n 番目のパケットの到着間隔

H_n: n 番目のパケットの処理時間

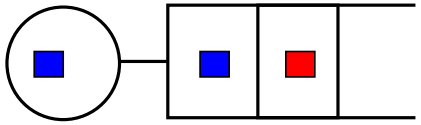
D_n: n 番目のパケットの遅延時間

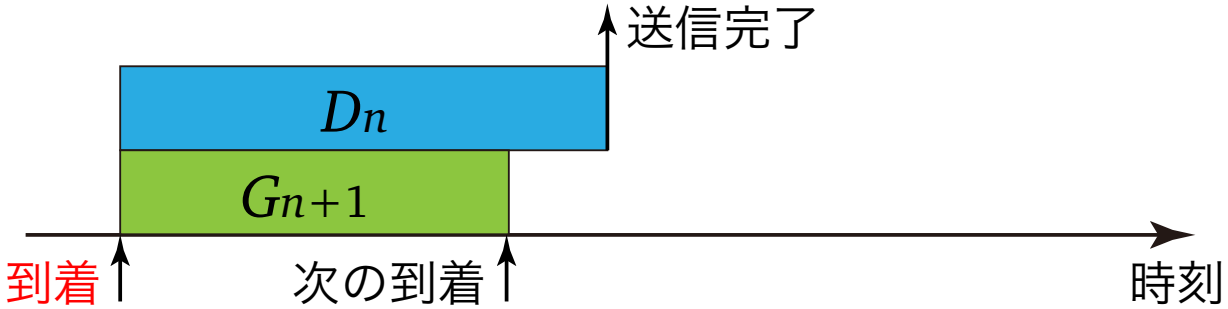
- $G_{n+1} > D_n$ の場合 (パケットの離脱直後にシステムが空)

$$A_{\mathrm{peak},n+1} = G_{n+1} + H_{n+1}$$

- $G_{n+1} \leq D_n$ の場合 (パケットの離脱直後に次の処理が開始)

$$A_{\mathrm{peak},n+1} = D_n + H_{n+1}$$





ピーク AoI の分布

G_n: $n-1$ 番目と n 番目のパケットの到着間隔

H_n: n 番目のパケットの処理時間

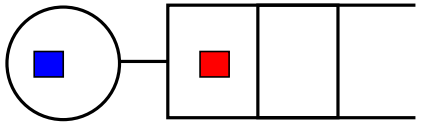
D_n: n 番目のパケットの遅延時間

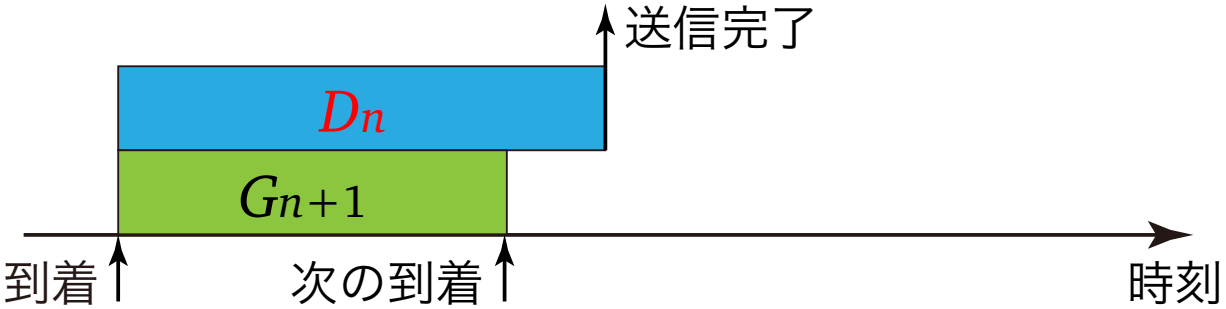
- $G_{n+1} > D_n$ の場合 (パケットの離脱直後にシステムが空)

$$A_{\mathrm{peak},n+1} = G_{n+1} + H_{n+1}$$

- $G_{n+1} \leq D_n$ の場合 (パケットの離脱直後に次の処理が開始)

$$A_{\mathrm{peak},n+1} = D_n + H_{n+1}$$





ピーク AoI の分布

G_n: $n-1$ 番目と n 番目のパケットの到着間隔

H_n: n 番目のパケットの処理時間

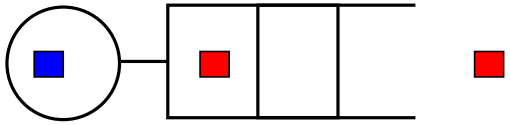
D_n: n 番目のパケットの遅延時間

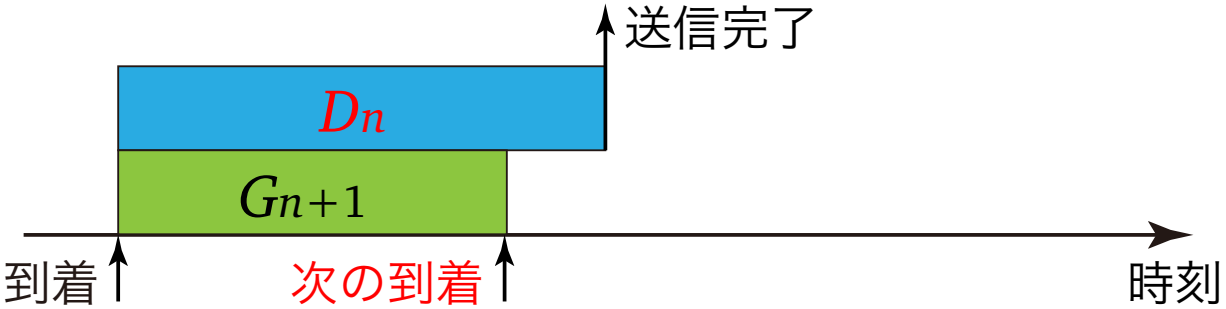
- $G_{n+1} > D_n$ の場合 (パケットの離脱直後にシステムが空)

$$A_{\mathrm{peak},n+1} = G_{n+1} + H_{n+1}$$

- $G_{n+1} \leq D_n$ の場合 (パケットの離脱直後に次の処理が開始)

$$A_{\mathrm{peak},n+1} = D_n + H_{n+1}$$





ピーク AoI の分布

G_n: $n-1$ 番目と n 番目のパケットの到着間隔

H_n: n 番目のパケットの処理時間

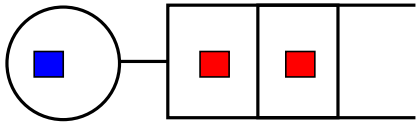
D_n: n 番目のパケットの遅延時間

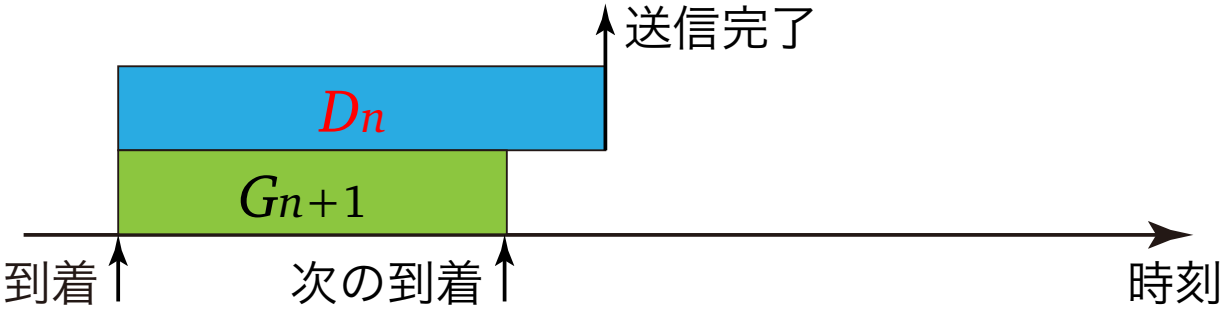
- $G_{n+1} > D_n$ の場合 (パケットの離脱直後にシステムが空)

$$A_{\mathrm{peak},n+1} = G_{n+1} + H_{n+1}$$

- $G_{n+1} \leq D_n$ の場合 (パケットの離脱直後に次の処理が開始)

$$A_{\mathrm{peak},n+1} = D_n + H_{n+1}$$





ピーク AoI の分布

G_n: $n-1$ 番目と n 番目のパケットの到着間隔

H_n: n 番目のパケットの処理時間

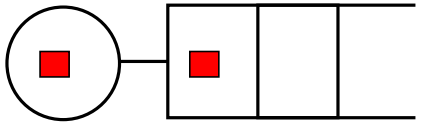
D_n: n 番目のパケットの遅延時間

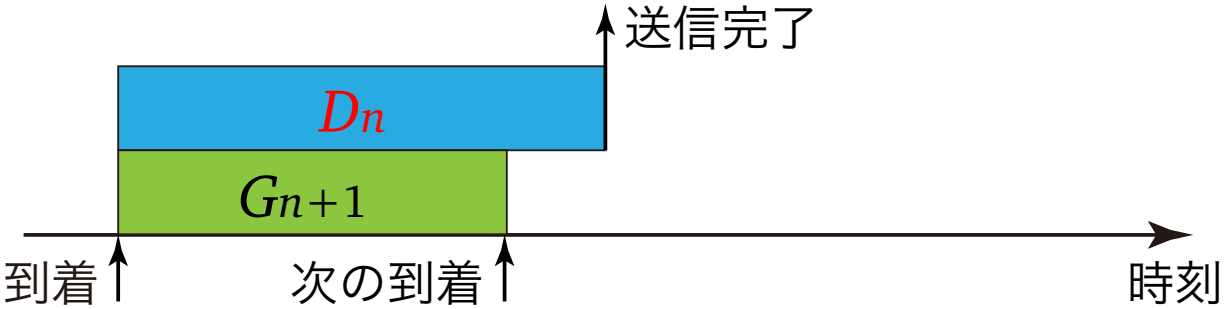
- $G_{n+1} > D_n$ の場合 (パケットの離脱直後にシステムが空)

$$A_{\mathrm{peak},n+1} = G_{n+1} + H_{n+1}$$

- $G_{n+1} \leq D_n$ の場合 (パケットの離脱直後に次の処理が開始)

$$A_{\mathrm{peak},n+1} = D_n + H_{n+1}$$





ピーク AoI の分布

G_n: $n-1$ 番目と n 番目のパケットの到着間隔

H_n: n 番目のパケットの処理時間

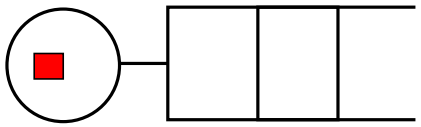
D_n: n 番目のパケットの遅延時間

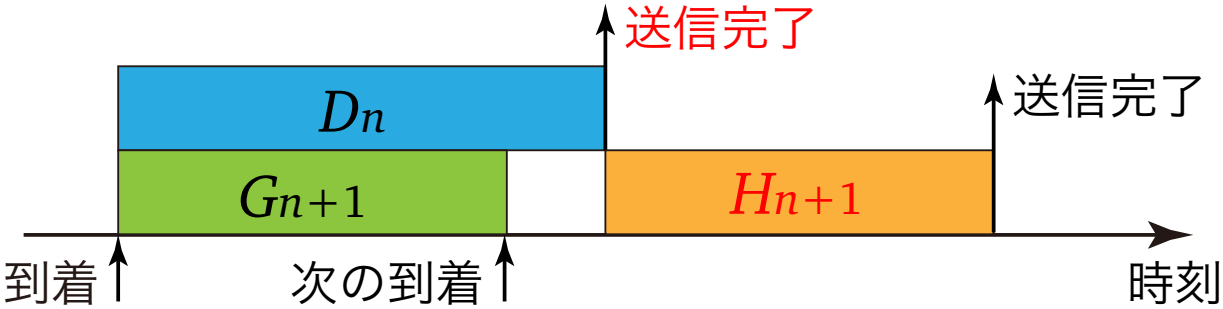
- $G_{n+1} > D_n$ の場合 (パケットの離脱直後にシステムが空)

$$A_{\mathrm{peak},n+1} = G_{n+1} + H_{n+1}$$

- $G_{n+1} \leq D_n$ の場合 (パケットの離脱直後に次の処理が開始)

$$A_{\mathrm{peak},n+1} = D_n + H_{n+1}$$





ピーク AoI の分布

G_n: $n-1$ 番目と n 番目のパケットの到着間隔

H_n: n 番目のパケットの処理時間

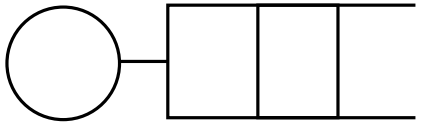
D_n: n 番目のパケットの遅延時間

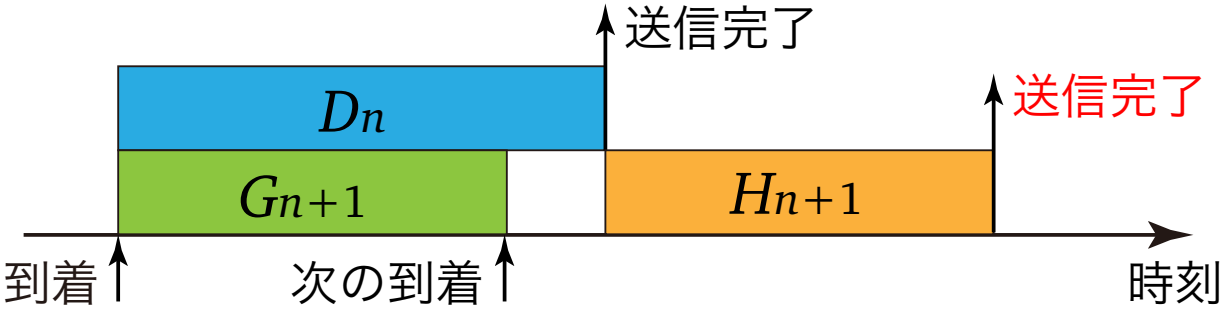
- $G_{n+1} > D_n$ の場合 (パケットの離脱直後にシステムが空)

$$A_{\mathrm{peak},n+1} = G_{n+1} + H_{n+1}$$

- $G_{n+1} \leq D_n$ の場合 (パケットの離脱直後に次の処理が開始)

$$A_{\mathrm{peak},n+1} = D_n + H_{n+1}$$





ピーク AoI の分布

G_n: $n-1$ 番目と n 番目のパケットの到着間隔
H_n: n 番目のパケットの処理時間
D_n: n 番目のパケットの遅延時間

- $G_{n+1} > D_n$ の場合 (パケットの離脱直後にシステムが空)

$$A_{\mathrm{peak},n+1} = G_{n+1} + H_{n+1}$$

- $G_{n+1} \leq D_n$ の場合 (パケットの離脱直後に次の処理が開始)

$$A_{\mathrm{peak},n+1} = D_n + H_{n+1}$$

したがって，次式が成立

$$A_{\mathrm{peak},n+1} = \max(G_{n+1}, D_n) + H_{n+1}$$

ピーク AoI の分布 (2)

G_n: $n-1$ 番目と n 番目のパケットの到着間隔
H_n: n 番目のパケットのサービス時間
D_n: n 番目のパケットの遅延時間

- $A_{\mathrm{peak},n} = \max(G_{n+1}, D_n) + H_{n+1}$
- G_{n+1}, D_n および H_{n+1} は互いに独立

➡ 定常性より，ピーク AoI の定常分布の LST が得られる

$G_{n+1} \le D_n$ の場合　　$G_{n+1} > D_n$ の場合

$$a^*_{\mathrm{peak}}(s) = \left[\int_0^\infty e^{-sx} G(x)\mathrm{d}D(x) + \int_0^\infty e^{-sx} D(x)\mathrm{d}G(x) - \mathrm{E}\left[\mathbb{1}\{G = D\} e^{-sG}\right]\right] h^*(s)$$

GI/GI/1 における AoI の定常分布

- AoI の定常分布の LST $a^*(s)$

$$a^*(s) = \frac{d^*(s) - a^*_{\mathrm{peak}}(s)}{s\mathrm{E}[G]}$$

- ピーク AoI の定常分布の LST $a^*_{\mathrm{peak}}(s)$

$$a^*_{\mathrm{peak}}(s) = \left[\int_0^\infty e^{-sx} G(x) \mathrm{d}D(x) + \int_0^\infty e^{-sx} D(x) \mathrm{d}G(x) - \mathrm{E}\left[\mathbb{1}\{G = D\} e^{-sG}\right]\right] h^*(s)$$

- $a^*(s)$ は 遅延時間 の定常分布を用いて与えられる

単一サーバ先着順処理システムの遅延時間

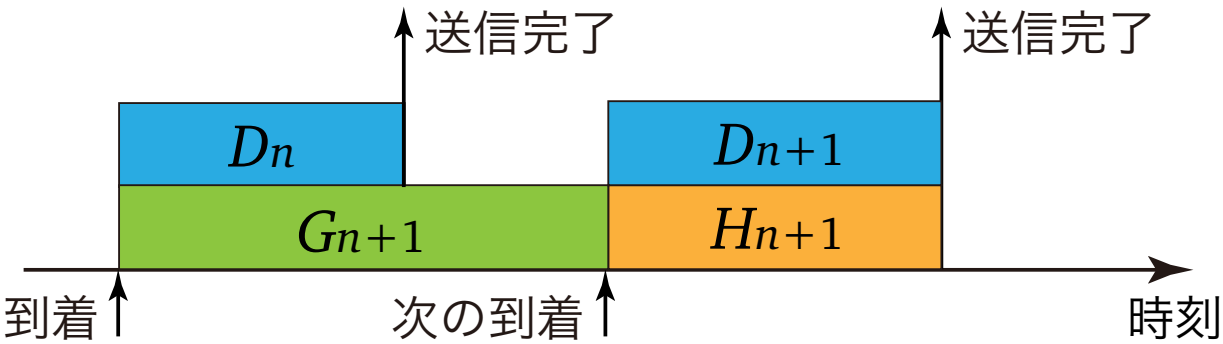
遅延時間が満たす漸化式 (GI/GI/1)

- n 番目のパケットの遅延時間 D_n は次の漸化式を満たす.

$$D_{n+1} = \max(0, D_n - G_{n+1}) + H_{n+1}$$

G_n: $n-1$ 番目と n 番目のパケットの到着間隔
H_n: n 番目のパケットのサービス時間

$\boxed{D_n \leq G_{n+1} \text{ のとき}}$



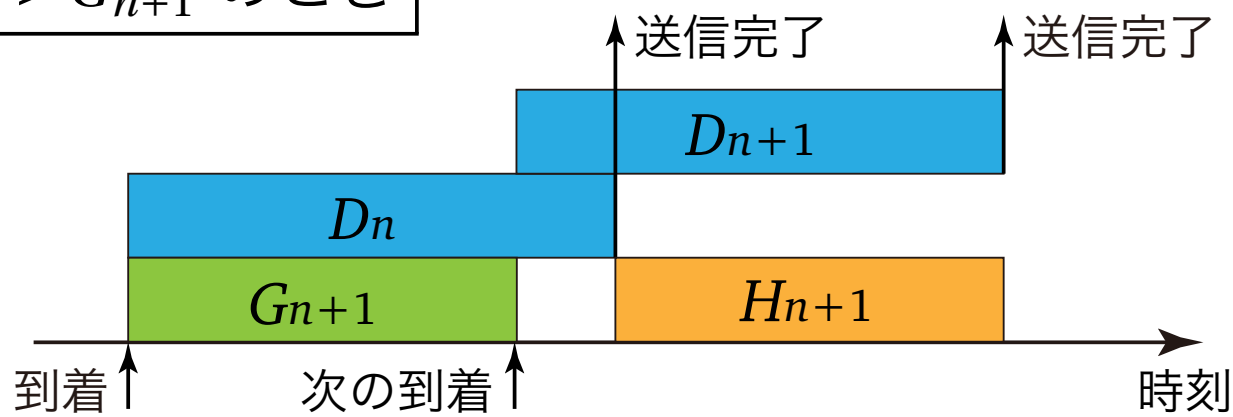
遅延時間が満たす漸化式 (GI/GI/1)

- n 番目のパケットの遅延時間 D_n は次の漸化式を満たす.

$$D_{n+1} = \max(0, D_n - G_{n+1}) + H_{n+1}$$

G_n: $n-1$ 番目と n 番目のパケットの到着間隔
H_n: n 番目のパケットのサービス時間

$D_n > G_{n+1}$ のとき



遅延時間が満たす漸化式 (GI/GI/1)

- n 番目のパケットの遅延時間 D_n は次の漸化式を満たす.

$$D_{n+1} = \max(0, D_n - G_{n+1}) + H_{n+1}$$

G_n: $n-1$ 番目と n 番目のパケットの到着間隔
H_n: n 番目のパケットのサービス時間

- システムが安定かつエルゴード的であるとき，次式が成立

$$D_n \xrightarrow{\mathrm{d}} D \quad (n \to \infty)$$

- 定常遅延時間 D は次の方程式を満たす確率変数

$$D = \max(0, D - G) + H$$

指数分布の性質

- B を平均 $1/\eta$ の指数分布に従う確率変数とする

$$B(x) = 1 - e^{-\eta x}, \quad b(x) = \eta e^{-\eta x}, \quad b^*(s) := \mathrm{E}[e^{-sB}] = \frac{\eta}{s+\eta}$$

分布関数　　密度関数　　LST

指数分布の性質

- B を平均 $1/\eta$ の指数分布に従う確率変数とする

$$B(x) = 1 - e^{-\eta x}, \quad b(x) = \eta e^{-\eta x}, \quad b^*(s) := \mathrm{E}[e^{-sB}] = \frac{\eta}{s+\eta}$$

分布関数　　密度関数　　LST

- C を，B と独立な非負確率変数とすると

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[e^{-s(\max(0,C-B))}\right] &= \mathrm{E}\left[e^{-s\cdot 0}\mathbb{1}\{C<B\}\right] + \mathrm{E}\left[e^{-s(C-B)}\mathbb{1}\{C\geq B\}\right] \\
&= \int_{x=0}^{\infty} \mathrm{d}C(x)e^{-\eta x} + \int_{x=0}^{\infty} \mathrm{d}C(x)\int_{y=0}^{x} e^{-s(x-y)}\eta e^{-\eta y}\mathrm{d}y \\
&= c^*(\eta) + \frac{\eta}{\eta - s}\left(c^*(s) - c^*(\eta)\right)
\end{aligned}$$

指数分布の性質

- B を平均 $1/\eta$ の指数分布に従う確率変数とする

$$B(x) = 1 - e^{-\eta x}, \quad b(x) = \eta e^{-\eta x}, \quad b^*(s) := \mathrm{E}[e^{-sB}] = \frac{\eta}{s+\eta}$$

分布関数　　密度関数　　LST

- C を，B と独立な非負確率変数とすると

$$\mathrm{E}\left[e^{-s(\max(0, C-B))}\right] = \frac{sc^*(\eta) - \eta c^*(s)}{s-\eta}$$

指数分布の性質

- B を平均 $1/\eta$ の指数分布に従う確率変数とする

$$B(x) = 1 - e^{-\eta x}, \quad b(x) = \eta e^{-\eta x}, \quad b^*(s) := \mathrm{E}[e^{-sB}] = \frac{\eta}{s+\eta}$$

分布関数　　密度関数　　LST

- C を，B と独立な非負確率変数とすると

$$\mathrm{E}\left[e^{-s(\max(0, C-B))}\right] = \frac{sc^*(\eta) - \eta c^*(s)}{s-\eta}$$

$$\mathrm{E}\left[e^{-s(\max(0, B-C))}\right] = \mathrm{E}\left[e^{-s\cdot 0}\mathbb{1}\{C \geq B\}\right] + \mathrm{E}\left[e^{-s(B-C)}\mathbb{1}\{C < B\}\right]$$

$$= \int_{x=0}^{\infty} \mathrm{d}C(x)(1 - e^{-\eta x}) + \int_{x=0}^{\infty} \mathrm{d}C(x) \int_{y=x}^{\infty} e^{-s(y-x)} \eta e^{-\eta y} \mathrm{d}y$$

$$= 1 - c^*(\eta) + \frac{\eta}{s+\eta} \cdot c^*(\eta)$$

指数分布の性質

- B を平均 $1/\eta$ の指数分布に従う確率変数とする

$$B(x) = 1 - e^{-\eta x}, \quad b(x) = \eta e^{-\eta x}, \quad b^*(s) := \mathrm{E}[e^{-sB}] = \frac{\eta}{s+\eta}$$

分布関数　　密度関数　　LST

- C を，B と独立な非負確率変数とすると

$$\mathrm{E}\left[e^{-s(\max(0, C-B))}\right] = \frac{sc^*(\eta) - \eta c^*(s)}{s-\eta}$$

$$\mathrm{E}\left[e^{-s(\max(0, B-C))}\right] = \frac{s+\eta - sc^*(\eta)}{s+\eta}$$

指数分布の性質

- B を平均 $1/\eta$ の指数分布に従う確率変数とする

$$B(x) = 1 - e^{-\eta x}, \quad b(x) = \eta e^{-\eta x}, \quad b^*(s) := \mathrm{E}[e^{-sB}] = \frac{\eta}{s+\eta}$$

分布関数　　密度関数　　LST

- C を，B と独立な非負確率変数とすると

$$\mathrm{E}\left[e^{-s(\max(0, C-B))}\right] = \frac{sc^*(\eta) - \eta c^*(s)}{s-\eta}$$

$$\mathrm{E}\left[e^{-s(\max(0, B-C))}\right] = \frac{s+\eta - sc^*(\eta)}{s+\eta}$$

➡ M/GI/1 ならびに GI/M/1 の遅延時間分布の解析に利用可能

M/GI/1 の遅延時間分布

パケットの到着間隔 G が平均 $1/\lambda$ の指数分布に従う場合 (M/GI/1)

- $D = \max(0, D - G) + H$ より，遅延時間 D の LST $d^*(s)$ は

$$d^*(s) = \frac{s d^*(\lambda) - \lambda d^*(s)}{s - \lambda} \cdot h^*(s) \quad \text{を満たす}$$

- 上式を $d^*(s)$ について解くと，

$$d^*(s) = \frac{d^*(\lambda) s}{s - \lambda + \lambda h^*(s)} \cdot h^*(s)$$

➡ 正規化条件 $\lim_{s \to 0+} d^*(s) = \lim_{s \to 0+} \mathrm{E}[e^{-sD}] = 1$ より，$d^*(s)$ が求まる

$$d^*(s) = \frac{(1 - \rho) s}{s - \lambda + \lambda h^*(s)} \cdot h^*(s) \qquad (\rho := \lambda \mathrm{E}[H])$$

指数分布の性質 (再掲)

- B を平均 $1/\eta$ の指数分布に従う確率変数とする

$$B(x) = 1 - e^{-\eta x}, \quad b(x) = \eta e^{-\eta x}, \quad b^*(s) := \mathrm{E}[e^{-sB}] = \frac{\eta}{s+\eta}$$

分布関数　　密度関数　　LST

- C を，B と独立な非負確率変数とすると

$$\mathrm{E}\left[e^{-s(\max(0, C-B))}\right] = \frac{sc^*(\eta) - \eta c^*(s)}{s-\eta}$$

M/GI/1 待ち行列

$$\mathrm{E}\left[e^{-s(\max(0, B-C))}\right] = \frac{s+\eta - sc^*(\eta)}{s+\eta}$$

$$\left(\begin{array}{l} D = \max(0, D-G) + H \\ \quad D\text{: 遅延時間}, \quad G\text{: 到着間隔} \end{array} \right)$$

指数分布の性質 (再掲)

- B を平均 $1/\eta$ の指数分布に従う確率変数とする

$$B(x) = 1 - e^{-\eta x}, \quad b(x) = \eta e^{-\eta x}, \quad b^*(s) := \mathrm{E}[e^{-sB}] = \frac{\eta}{s+\eta}$$

分布関数　　密度関数　　LST

- C を，B と独立な非負確率変数とすると

$$\mathrm{E}\left[e^{-s(\max(0, C-B))}\right] = \frac{sc^*(\eta) - \eta c^*(s)}{s-\eta}$$

M/GI/1 待ち行列

$$\mathrm{E}\left[e^{-s(\max(0, B-C))}\right] = \frac{s+\eta - sc^*(\eta)}{s+\eta}$$

GI/M/1 待ち行列

$$\left(\begin{array}{l} D = \max(0, D-G) + H \\ \quad D\text{: 遅延時間}, \quad G\text{: 到着間隔} \end{array} \right)$$

GI/M/1 の遅延時間分布 (1)

サービス時間 H が平均 $1/\mu$ の指数分布に従う場合 (GI/M/1)

- 仮に，遅延時間 D が平均 $1/\beta$ ($\beta > 0$) の指数分布に従うとすると，その LST $d^*(s)$ は $D = \max(0, D - G) + H$ より，

$$d^*(s) = \frac{\beta}{s+\beta} = \frac{s+\beta-sg^*(\beta)}{s+\beta} \cdot \frac{\mu}{s+\mu} \quad \text{を満たす}$$

これを整理すると，β に関する方程式を得る

$$\beta = \mu - \mu g^*(\beta)$$

- 上式を満たす $\beta > 0$ は一意に定まる

➡ D は平均 $1/\beta$ の指数分布に従うことが示された

GI/M/1 の遅延時間分布 (2)

サービス時間 H が平均 $1/\mu$ の指数分布に従う場合 (GI/M/1)

- 遅延時間 D は平均 $1/\beta$ の指数分布に従う

  ただし，β は $x = \mu - \mu g^*(x)$ $(x > 0)$ の一意解

- しばしば，β の代わりに $\gamma := g^*(\beta)$ が用いられる
  - γ は $x = g^*(\mu - \mu x)$ $(0 < x < 1)$ の一意解
  - 到着間隔が平均 $1/\lambda$ の指数分布に従うとき (M/M/1),
    γ はトラヒック強度 $\rho := \lambda \mathrm{E}[H]$ に等しい

- GI/M/1 待ち行列における遅延時間 D の LST $d^*(s)$

$$d^*(s) = \frac{\mu - \mu\gamma}{s + \mu - \mu\gamma} \quad \left(= \frac{\beta}{s + \beta} \right)$$

M/GI/1 および GI/M/1 における AoI 分布

GI/GI/1 における AoI の定常分布 (再掲)

- AoI の定常分布の LST $a^*(s)$

$$a^*(s) = \frac{d^*(s) - a^*_{\mathrm{peak}}(s)}{s\mathrm{E}[G]}$$

- ピーク AoI の定常分布の LST $a^*_{\mathrm{peak}}(s)$

$$a^*_{\mathrm{peak}}(s) = \left[\int_0^\infty e^{-sx} G(x) \mathrm{d}D(x) + \int_0^\infty e^{-sx} D(x) \mathrm{d}G(x) - \mathrm{E}\left[\mathbb{1}\{G = D\} e^{-sG}\right]\right] h^*(s)$$

- $a^*(s)$ は 遅延時間 の定常分布を用いて与えられる

M/GI/1 待ち行列の AoI

パケットの到着間隔 G が平均 $1/\lambda$ の指数分布に従う場合 (M/GI/1)

- 遅延時間 D の LST は次式で与えられる

$$d^*(s) = \frac{(1-\rho)s}{s-\lambda+\lambda h^*(s)} \cdot h^*(s)$$

- 上式を用いて計算すると，ピーク AoI の LST $a^*_{\mathrm{peak}}(s)$ を得る

$$\begin{aligned} a^*_{\mathrm{peak}}(s) &= \left[\int_0^\infty e^{-sx}(1-e^{-\lambda x})\mathrm{d}D(x) + \int_0^\infty e^{-sx}D(x)\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x\right] h^*(s) \\ &= \left[d^*(s) - d^*(s+\lambda) + \frac{\lambda}{s+\lambda}\cdot d^*(s+\lambda)\right] h^*(s) \end{aligned}$$

M/GI/1 待ち行列の AoI

パケットの到着間隔 G が平均 $1/\lambda$ の指数分布に従う場合 (M/GI/1)

- 遅延時間 D の LST は次式で与えられる

$$d^*(s) = \frac{(1-\rho)s}{s-\lambda+\lambda h^*(s)} \cdot h^*(s)$$

- 上式を用いて計算すると，ピーク AoI の LST $a^*_{\mathrm{peak}}(s)$ を得る

$$a^*_{\mathrm{peak}}(s) = \left[d^*(s) - d^*(s+\lambda) + \frac{\lambda}{s+\lambda} \cdot d^*(s+\lambda) \right] h^*(s)$$

M/GI/1 待ち行列の AoI

パケットの到着間隔 G が平均 $1/\lambda$ の指数分布に従う場合 (M/GI/1)

- 遅延時間 D の LST は次式で与えられる

$$d^*(s) = \frac{(1-\rho)s}{s-\lambda+\lambda h^*(s)} \cdot h^*(s)$$

- 上式を用いて計算すると，ピーク AoI の LST $a^*_{\text{peak}}(s)$ を得る

$$a^*_{\text{peak}}(s) = \left[d^*(s) - d^*(s+\lambda) + \frac{\lambda}{s+\lambda} \cdot d^*(s+\lambda) \right] h^*(s)$$

したがって，$a^*(s) = \dfrac{d^*(s) - a^*_{\text{peak}}(s)}{s\mathrm{E}[G]}$ より，AoI の LST が求まる

$$\boxed{a^*(s) = \rho d^*(s) \cdot \frac{1-h^*(s)}{\mathrm{E}[H]s} + d^*(s+\lambda) \cdot \frac{\lambda}{s+\lambda} \cdot h^*(s)}$$

AoI の平均と二次モーメント (M/GI/1)

モーメントの公式 $\mathrm{E}[A^k] = (-1)^k \lim_{s \to 0+} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k} a^*(s)$

- 例えば，AoI の平均と二次モーメントは次式で与えられる

$$\mathrm{E}[A] = \mathrm{E}[D] + \frac{1-\rho}{\rho h^*(\lambda)} \cdot \mathrm{E}[H]$$

$$\mathrm{E}[A^2] = \mathrm{E}[D^2] + \frac{2(1-\rho)}{(\rho h^*(\lambda))^2} \left[1 + \rho h^*(\lambda) + \lambda h^{(1)}(\lambda)\right] (\mathrm{E}[H])^2$$

ただし，

$$\mathrm{E}[D] = \frac{\lambda \mathrm{E}[H^2]}{2(1-\rho)} + \mathrm{E}[H]$$

$$\mathrm{E}[D^2] = \frac{\lambda \mathrm{E}[H^3]}{3(1-\rho)} + \frac{(\lambda \mathrm{E}[H^2])^2}{2(1-\rho)^2} + \frac{\mathrm{E}[H^2]}{1-\rho}$$

M/M/1 待ち行列

サービス時間分布を指数分布に特別化 ($H(x) = 1 - e^{-\mu x}$)

- AoI の LST は単純化される

$$a^*(s) = \frac{(1-\rho)\mu}{s + (1-\rho)\mu} - \frac{(1-\rho)\mu s(s+\lambda+\mu)}{(s+\mu)^2(s+\lambda)}$$

- AoI の平均と二次モーメントも単純化される (※ $\mathrm{E}[A]$ は [1] と一致)

$$\mathrm{E}[A] = \left(\frac{1}{1-\rho} + \frac{1}{\rho} - \rho\right)\mathrm{E}[H], \quad \mathrm{E}[A^2] = 2\left(\frac{1}{(1-\rho)^2} - 2\rho + \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\right)(\mathrm{E}[H])^2$$

- さらに，AoI の分布関数が簡潔な形で書き下せる

$$A(x) = 1 - e^{-(1-\rho)\mu x} + \left(\frac{1}{1-\rho} + \rho\mu x\right)e^{-\mu x} - \frac{1}{1-\rho}\cdot e^{-\lambda x}$$

[1] S. Kaul et al., IEEE INFOCOM 2012.

M/D/1 待ち行列

サービス時間分布を一定分布に特別化 ($H = \mathrm{E}[H]$, w.p. 1)

- AoI の平均と二次モーメントが単純化される
  (※ [1] では，積分を用いて $\mathrm{E}[A]$ が与えられている)

$$\mathrm{E}[A] = \left(\frac{1}{2(1-\rho)} + \frac{1}{2} + \frac{1-\rho}{\rho \exp(-\rho)} \right) \mathrm{E}[H]$$

$$\mathrm{E}[A^2] = \left(\frac{1}{2(1-\rho)^2} + \frac{1}{3(1-\rho)} + \frac{1}{6} + \frac{2(1-\rho)}{\rho^2 \exp(-2\rho)} \right) (\mathrm{E}[H])^2$$

- 単純な計算により，次のことが確かめられる

到着率 λ と平均サービス時間 $\mathrm{E}[H]$ を固定すると，
M/D/1 の $\mathrm{E}[A]$ は必ず M/M/1 より小さい

[1] S. Kaul et al., IEEE INFOCOM 2012.

GI/M/1 待ち行列の AoI

サービス時間 H が平均 $1/\mu$ の指数分布に従う場合 (GI/M/1)

- 遅延時間 D は平均 $1/(\mu-\mu\gamma)$ の指数分布に従う

$$D(x) = 1 - e^{-(\mu-\mu\gamma)x}, \quad d(x) = (\mu-\mu\gamma)e^{-(\mu-\mu\gamma)x}, \quad d^*(s) = \frac{\mu-\mu\gamma}{s+\mu-\mu\gamma}$$

ただし γ は，$x = g^*(\mu-\mu x)$ $(0 < x < 1)$ の一意解

- 上式を用いて計算すると，ピーク AoI の LST $a^*_{\mathrm{peak}}(s)$ を得る

$$\begin{aligned} a^*_{\mathrm{peak}}(s) &= \left[\int_0^\infty e^{-sx}G(x)(\mu-\mu\gamma)e^{-(\mu-\mu\gamma)x}\mathrm{d}x \right. \\ &\qquad \left. + \int_0^\infty e^{-sx}(1-e^{-(\mu-\mu\gamma)x})\mathrm{d}G(x)\right]\frac{\mu}{s+\mu} \\ &= \left[\frac{\mu-\mu\gamma}{s+\mu-\mu\gamma}\cdot g^*(s+\mu-\mu\gamma) + g^*(s) - g^*(s+\mu-\mu\gamma)\right]\frac{\mu}{s+\mu} \end{aligned}$$

GI/M/1 待ち行列の AoI

サービス時間 H が平均 $1/\mu$ の指数分布に従う場合 (GI/M/1)

- 遅延時間 D は平均 $1/(\mu-\mu\gamma)$ の指数分布に従う

$$D(x) = 1 - e^{-(\mu-\mu\gamma)x}, \quad d(x) = (\mu-\mu\gamma)e^{-(\mu-\mu\gamma)x}, \quad d^*(s) = \frac{\mu-\mu\gamma}{s+\mu-\mu\gamma}$$

ただし γ は，$x = g^*(\mu-\mu x)$ $(0 < x < 1)$ の一意解

- 上式を用いて計算すると，ピーク AoI の LST $a^*_{\text{peak}}(s)$ を得る

$$a^*_{\text{peak}}(s) = \left[\frac{\mu-\mu\gamma}{s+\mu-\mu\gamma}\cdot g^*(s+\mu-\mu\gamma) + g^*(s) - g^*(s+\mu-\mu\gamma)\right]\frac{\mu}{s+\mu}$$

GI/M/1 待ち行列の AoI

サービス時間 H が平均 $1/\mu$ の指数分布に従う場合 (GI/M/1)

- 遅延時間 D は平均 $1/(\mu-\mu\gamma)$ の指数分布に従う

$$D(x) = 1 - e^{-(\mu-\mu\gamma)x}, \quad d(x) = (\mu-\mu\gamma)e^{-(\mu-\mu\gamma)x}, \quad d^*(s) = \frac{\mu-\mu\gamma}{s+\mu-\mu\gamma}$$

ただし γ は，$x = g^*(\mu-\mu x)$ $(0 < x < 1)$ の一意解

- 上式を用いて計算すると，ピーク AoI の LST $a^*_{\text{peak}}(s)$ を得る

$$a^*_{\text{peak}}(s) = \left[\frac{\mu-\mu\gamma}{s+\mu-\mu\gamma}\cdot g^*(s+\mu-\mu\gamma) + g^*(s) - g^*(s+\mu-\mu\gamma)\right]\frac{\mu}{s+\mu}$$

したがって，$a^*(s) = \dfrac{d^*(s) - a^*_{\text{peak}}(s)}{s\mathrm{E}[G]}$ より，AoI の LST が求まる

GI/M/1 待ち行列の AoI (2)

- AoI の LST は次式で与えられる

$$\boxed{a^*(s) = \left[\rho \cdot \frac{(1-\gamma)\mu}{s+(1-\gamma)\mu} \cdot \frac{g^*(s+(1-\gamma)\mu)-\gamma}{1-\gamma} + \frac{1-g^*(s)}{s\mathrm{E}[G]}\right] \frac{\mu}{s+\mu}}$$

- また，AoI の平均と二次モーメントは次式で与えられる

$$\mathrm{E}[A] = \frac{\mathrm{E}[G^2]}{2\mathrm{E}[G]} + \frac{1}{\mu} - \frac{g^{(1)}((1-\gamma)\mu)}{(1-\gamma)\mu\mathrm{E}[G]},$$

$$\mathrm{E}[A^2] = \frac{\mathrm{E}[G^3]}{3\mathrm{E}[G]} + \rho\mathrm{E}[G^2] + \frac{2}{\mu^2} + \frac{\rho}{1-\gamma}\left[g^{(2)}((1-\gamma)\mu) - 2\left(\frac{1}{(1-\gamma)\mu} + \frac{1}{\mu}\right) g^{(1)}((1-\gamma)\mu)\right]$$

D/M/1 待ち行列

到着間隔分布を一定分布に特別化 ($G = \mathrm{E}[G]$, w.p. 1)

- AoI の平均と二次モーメントが単純化される (※ $\mathrm{E}[A]$ は [1] と一致)

$$\mathrm{E}[A] = \left[\frac{1}{2\rho} + \frac{1}{1-\gamma}\right]\frac{1}{\mu}$$

$$\mathrm{E}[A^2] = \left(2\left(\frac{1}{1-\gamma}\right)^2 + \frac{1}{1-\gamma}\cdot\frac{1}{\rho} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\rho^2}\right)\left(\frac{1}{\mu}\right)^2$$

[1] S. Kaul et al., IEEE INFOCOM 2012.

まとめ

- Age of Information (AoI) に関する先行研究
  - ほとんどが平均値のみに関する議論
  - 指数分布や一定分布など，モデルに特別な分布を仮定

本研究では，

- 一般的な状況下で，AoI の分布が満たす関係式を導出
  - AoI の解析には，ピーク AoI と遅延時間を別々に考察すれば十分であることを示した
- これに基づいて，先着順処理モデルにおける AoI を解析
- 後着順処理モデルの解析を含むプレプリントは https://arxiv.org/abs/1804.06139 から入手可能