

メッセージ伝播復調法の新展開： 期待値伝播法

IT/SIP/RCS合同研究会
サンポートホール高松
平成30年1月22日

豊橋技術科学大学
電気・電子情報工学系 准教授
竹内啓悟

概要

1. メッセージ伝播復調法の導入
2. メッセージ伝播復調法の導出
 - 並列干渉除去法 (PIC)
 - 近似的メッセージ伝播法 (AMP)
 - LMMSE-PIC
 - 期待値伝播法 (EP)
3. 数値実験

システムモデル

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{w} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_M).$$

- 大規模MIMO

$\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$: N 本のアンテナから送信されるベクトル

$\mathbf{y} \in \mathbb{C}^M$: M 本のアンテナで受信されるベクトル

$\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{M \times N}$: 送受信アンテナ間の利得を表す通信路行列

- 圧縮センシング

$\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$: N 次元のスパース信号ベクトル

$\mathbf{y} \in \mathbb{C}^M$: M 次元の観測ベクトル

$\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{M \times N}$: 線形観測を表現する観測行列

- 目的

\mathbf{A} と \mathbf{y} に関する知識を使って、未知の \mathbf{x} を推定したい。

統計性に関する仮定

推定すべきベクトルは情報理論的な意味で**スパース**

- **圧縮センシング** (狭義のスパース性)

信号ベクトル x の要素は、有限個を除いてゼロである。

- **大規模MIMO** (広義のスパース性)

送信ベクトル x の各要素は、有限個の信号点しか取らない。

行列 A は**スパースではない**。

- **圧縮センシング**

観測行列 A は、要素が密に詰まった行列が良い(とされる)。

- **大規模MIMO**

通信路行列 A は、要素が密に詰まった表現をしている。

ベイズ最適な推定

事後平均推定量

$$\hat{x} = \mathbb{E}[x|y, A] = \frac{\sum_x x p(y|A, x) p(x)}{\sum_x p(y|A, x) p(x)}.$$

平均二乗誤差 (MSE) $\mathbb{E}[\|x - \hat{x}\|^2]$ を最小化

総和の計算量

- 大規模MIMO BPSK変調の場合、 $\mathcal{O}(2^N)$
- 圧縮センシング k -スパースベクトルの場合、
非ゼロ要素が L 個の要素を取るとして、

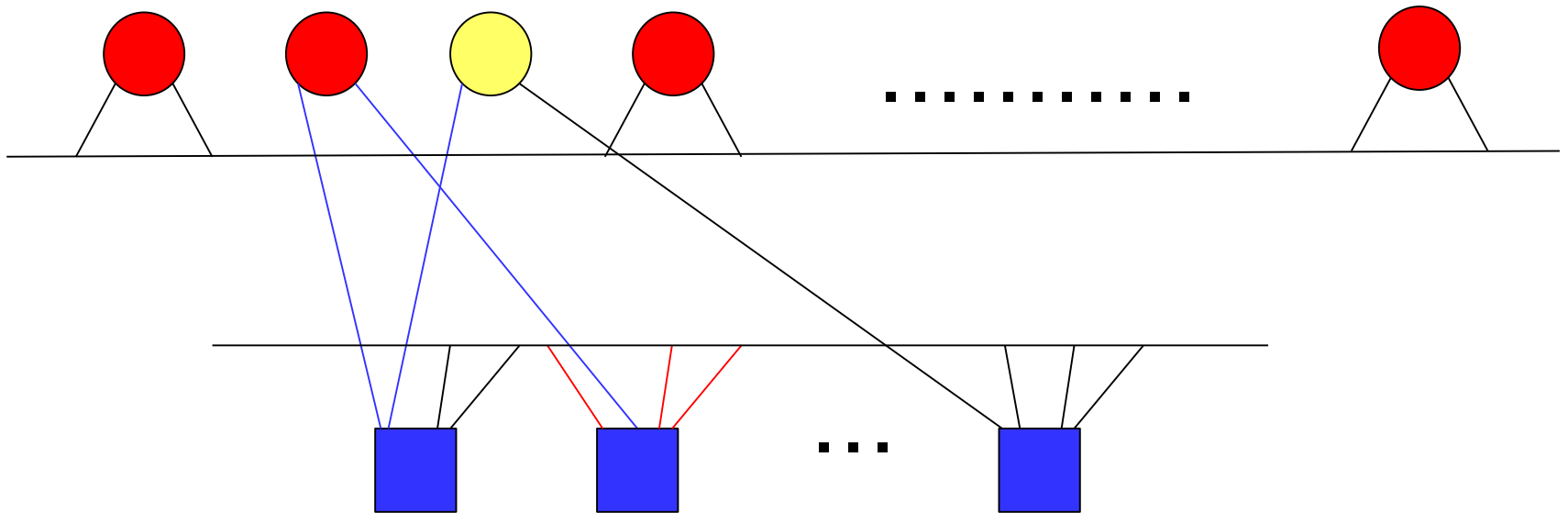
$$\mathcal{O}\left(\binom{N}{k} + L^k\right) = \mathcal{O}(N^k + L^k), \quad k \ll N$$

メッセージ伝播法

基本原則

自分が送ったメッセージが、自分に戻ってきてはいけない。

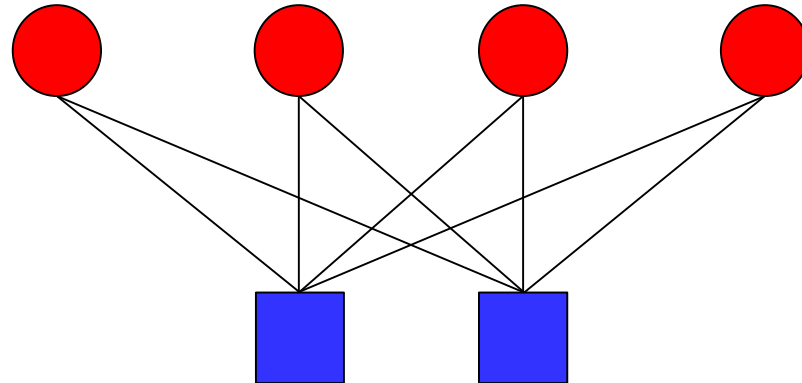
行重み4、列重み2の疎行列Aのファクターグラフ表現



赤の枝が、黄色のノードと接続する確率は小さい。

完全二部グラフの場合

4ステップ前に送ったメッセージが自分に戻ってくる。



解決の方針

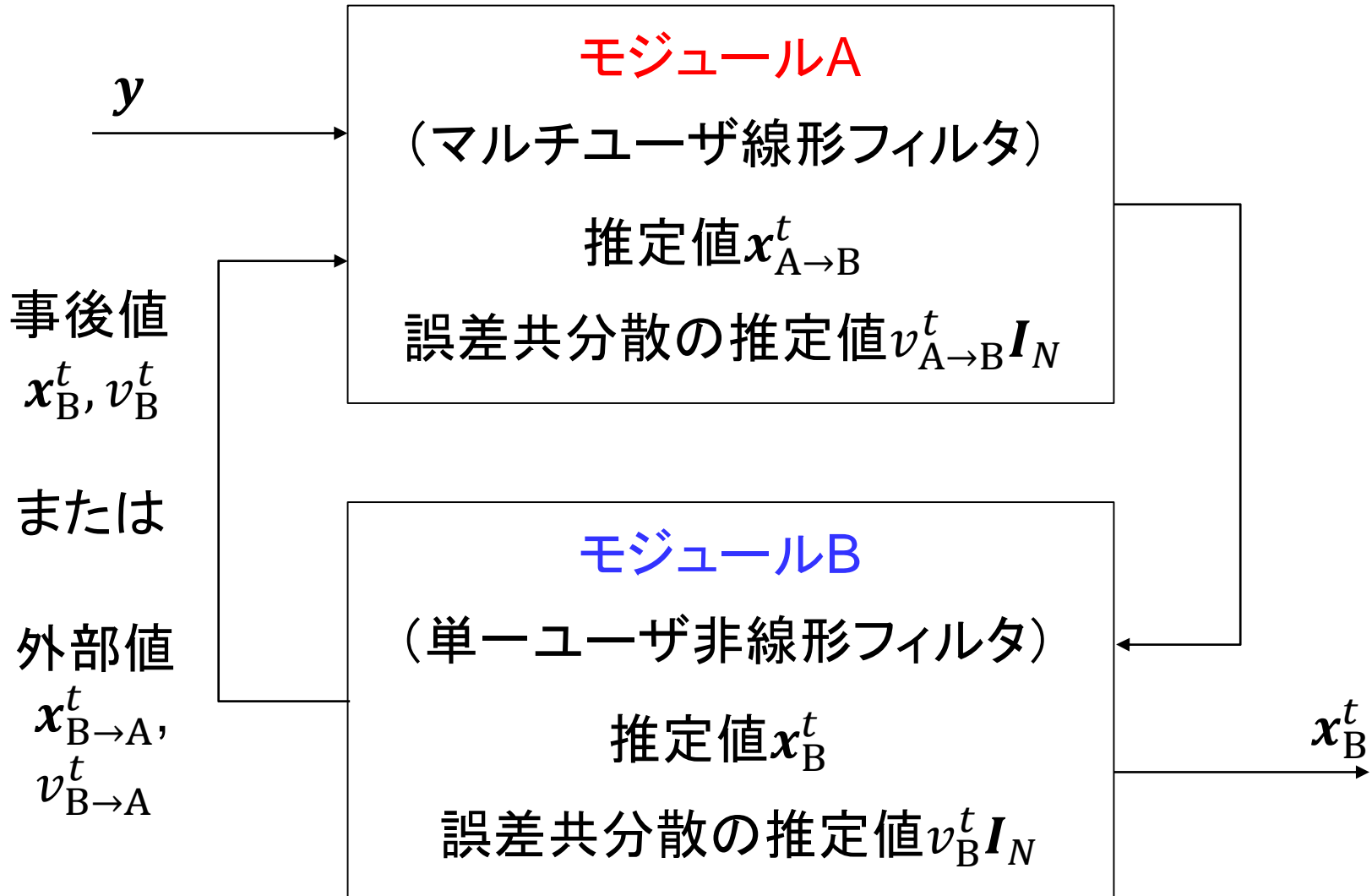
自分が送ったメッセージがどんな形で戻ってくるかを**完璧に**予想して、その影響を**完全に**除去したメッセージを送ればよい。

- 4ステップ前ならば、予想できる？
- ノード数が非常に多ければ、確率論の極限定理が使える？

概要

1. メッセージ伝播復調法の導入
2. メッセージ伝播復調法の導出
 - 並列干渉除去法 (PIC)
 - 近似的メッセージ伝播法 (AMP)
 - LMMSE-PIC
 - 期待値伝播法 (EP)
3. 数値実験

メッセージ伝播復調法



並列干渉除去法 (PIC)

PIC [Varanasi-Aazhang 1990]

モジュールA

各シンボル x_n の推定値 $x_{B,n}^t$ を使って、受信ベクトル \mathbf{y} から干渉成分を除去した上で、**整合フィルタ**を使う。

$$\begin{aligned}x_{A \rightarrow B,n}^t &= \mathbf{a}_n^H \left(\mathbf{y} - \sum_{n' \neq n} \mathbf{a}_{n'} x_{B,n'}^t \right) = \mathbf{a}_n^H (\mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{x}_B^t + \mathbf{a}_n x_{B,n}^t) \\ &= x_{B,n}^t + \mathbf{a}_n^H (\mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{x}_B^t).\end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N), \quad \|\mathbf{a}_n\|^2 = 1.$$

ベクトル表示して、

$$\mathbf{x}_{A \rightarrow B}^t = \mathbf{x}_B^t + \mathbf{A}^H \mathbf{u}^t, \quad \mathbf{u}^t = \mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{x}_B^t.$$

PIC

モジュールB

- 前回の推定値 x_B^t が真の x に一致していると仮定

$$\mathbf{x}_{A \rightarrow B}^t = \mathbf{x}_B^t + \mathbf{A}^H(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}_B^t) = \mathbf{x} + \mathbf{A}^H(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{z},$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{A}^H \mathbf{w} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{A}^H \mathbf{A}).$$

- グラム行列 $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$ が単位行列 I_N に等しいと仮定

⇒ 要素毎に推定しても、性能損失がない。

$$x_{B,n}^{t+1} = \mathbb{E}[x_n | x_{A,n}^t] = \eta^t(x_{A \rightarrow B,n}^t; \sigma^2)$$

ベクトル表示して、 $\mathbf{x}_B^{t+1} = \eta^t(\mathbf{x}_{A \rightarrow B}^t; \sigma^2)$

QPSKならば・・・

$$\eta^t(x; \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{2}\Re[x]}{\sigma^2}\right) + \frac{i}{\sqrt{2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{2}\Im[x]}{\sigma^2}\right).$$

PIC

モジュールA

$$\mathbf{x}_{A \rightarrow B}^t = \mathbf{x}_B^t + \mathbf{A}^H \mathbf{u}^t, \quad \mathbf{u}^t = \mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{x}_B^t.$$

モジュールB

$$\mathbf{x}_B^{t+1} = \eta^t(\mathbf{x}_{A \rightarrow B}^t; \sigma^2)$$

導出時の仮定

- モジュールBでの推定値 \mathbf{x}_B^t が真の \mathbf{x} に一致している。
- グラム行列 $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$ が単位行列 \mathbf{I}_N に等しい。

これらの仮定は、 $M \rightarrow \infty$ の極限でしか成立しない。

概要

1. メッセージ伝播復調法の導入
2. メッセージ伝播復調法の導出
 - 並列干渉除去法(PIC)
 - 近似的メッセージ伝播法(AMP)
 - LMMSE-PIC
 - 期待値伝播法(EP)
3. 数値実験

近似的メッセージ伝播法(AMP)

ベイズ最適AMP [Kabashima 2003, Donoho *et al.* 2009]

モジュールA

$$\mathbf{x}_{A \rightarrow B}^t = \mathbf{x}_B^t + \mathbf{A}^H \mathbf{u}^t, \quad v_{A \rightarrow B}^t = \sigma^2 + \frac{N}{M} v_B^t.$$

$$\mathbf{u}^t = \mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{x}_B^t + \frac{N v_B^t}{M v_{A \rightarrow B}^{t-1}} \mathbf{u}^{t-1}.$$

モジュールB

$$\mathbf{x}_B^{t+1} = \eta^t(\mathbf{x}_{A \rightarrow B}^t; v_{A \rightarrow B}^t), \quad v_B^{t+1} = \frac{1}{N} \mathbb{E} \left[\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_B^t\|^2 \mid \mathbf{x}_{A \rightarrow B}^t \right].$$

補正の目的

\mathbf{A} が平均0で独立同一分布する要素を持つ場合に、大システム極限($\alpha = N/M$ を固定して $M, N \rightarrow \infty$)で、干渉雑音が $\mathcal{CN}(\mathbf{0}, v_{A \rightarrow B}^t \mathbf{I}_N)$ に収束するように、補正項を追加した。

状態発展法

状態発展方程式 [Bayati-Montanari 2011]

$$\bar{v}_{A \rightarrow B}^t = \sigma^2 + \alpha \bar{v}_B^t,$$

$$\bar{v}_B^{t+1} = \mathbb{E}[|x_1 - \eta^t(x_1 + z_1^t)|^2], \quad z_1^t \sim \mathcal{CN}(0, \bar{v}_{A \rightarrow B}^t).$$

平均二乗誤差

$$\lim_{N=\alpha M \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_B^t\|^2 = \bar{v}_B^t \quad \text{a. s.}$$

AMPは自分に戻ってくるメッセージの影響を**完全に**除去し、
干渉雑音の分散を**完璧に**予想している。

概要

1. メッセージ伝播復調法の導入
2. メッセージ伝播復調法の導出
 - 並列干渉除去法(PIC)
 - 近似的メッセージ伝播法(AMP)
 - LMMSE-PIC
 - 期待値伝播法(EP)
3. 数値実験

LMMSE-PIC

モジュールA

整合フィルタを線形最小平均二乗誤差 (LMMSE) フィルタに置き換えることで、PICの性能を改善する。

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}_B^t + \mathbf{a}_n x_{B,n}^t = \mathbf{a}_n x_n + \sum_{n' \neq n} \mathbf{a}_{n'} (x_{n'} - x_{B,n'}^t) + \mathbf{w}$$

干渉雑音の白色化

誤差 $x - x_B^t$ は平均0共分散 $v_B^t \mathbf{I}_M$ であると仮定

$$\mathbf{\Xi}_n^t = \sigma^2 \mathbf{I}_M + v_B^t \sum_{n' \neq n} \mathbf{a}_{n'} \mathbf{a}_{n'}^H.$$

$$(\mathbf{\Xi}_n^t)^{-1/2} \mathbf{r}_n = (\mathbf{\Xi}_n^t)^{-1/2} \mathbf{a}_n x_n + \boldsymbol{\xi}_n^t, \quad \mathbb{E}[\boldsymbol{\xi}_n^t] = 0, \mathbb{E}[\boldsymbol{\xi}_n^t (\boldsymbol{\xi}_n^t)^H] = \mathbf{I}.$$

LMMSE-PIC

整合フィルタ

$$\mathbf{x}_{A \rightarrow B, n}^t = \frac{\{(\mathbf{\Xi}_n^t)^{-1/2} \mathbf{a}_n\}^H (\mathbf{\Xi}_n^t)^{-1} \mathbf{r}_n}{\mathbf{a}_n^H (\mathbf{\Xi}_n^t)^{-1} \mathbf{a}_n}, \quad v_{A \rightarrow B}^t = \frac{1}{N} \mathbb{E} \left[\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_A^t\|^2 \right].$$

モジュールA

行列反転公式を使って、式を整理すると・・・

$$\mathbf{x}_{A \rightarrow B}^t = \mathbf{x}_B^t + \gamma(v_B^t) \mathbf{A}^H \mathbf{\Xi}^{-1}(v_B^t) (\mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{x}_B^t), \quad v_{A \rightarrow B}^t = \gamma(v_B^t) - v_B^t.$$

ただし、

$$\mathbf{\Xi}(v) = \sigma^2 \mathbf{I}_M + v \mathbf{A} \mathbf{A}^H,$$
$$\frac{1}{\gamma(v)} = \frac{1}{N} \text{Tr}\{\mathbf{\Xi}^{-1}(v) \mathbf{A} \mathbf{A}^H\}.$$

LMMSE-PIC

モジュールB

干渉雑音 \mathbf{z}^t はガウス分布していると仮定

$$\mathbf{x}_{A \rightarrow B}^t = \mathbf{x} + \mathbf{z}^t, \quad \mathbf{z}^t \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, v_{A \rightarrow B}^t \mathbf{I}_N).$$

事後平均推定量

$$\mathbf{x}_B^{t+1} = \mathbb{E}[\mathbf{x} | \mathbf{x}_{A \rightarrow B}^t] = \eta^t(\mathbf{x}_{A \rightarrow B}^t; v_{A \rightarrow B}^t).$$

事後分散

$$v_B^{t+1} = \frac{1}{N} \mathbb{E} \left[\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_B^{t+1}\|^2 \middle| \mathbf{x}_{A \rightarrow B}^t \right].$$

LMMSE-PIC

モジュールA

$$\mathbf{x}_{A \rightarrow B}^t = \mathbf{x}_B^t + \gamma(v_B^t) \mathbf{A}^H \mathbf{\Xi}^{-1}(v_B^t) (\mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{x}_B^t),$$

$$v_{A \rightarrow B}^t = \gamma(v_B^t) - v_B^t.$$

モジュールB

$$\mathbf{x}_B^{t+1} = \eta^t(\mathbf{x}_{A \rightarrow B}^t; v_{A \rightarrow B}^t), \quad v_B^{t+1} = \frac{1}{N} \mathbb{E} \left[\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_B^{t+1}\|^2 \mid \mathbf{x}_{A \rightarrow B}^t \right].$$

導出時の仮定

- 誤差 $\mathbf{x} - \mathbf{x}_B^t$ は平均 $\mathbf{0}$ 共分散 $v_B^t \mathbf{I}_M$ である。
- 誤差 $\mathbf{x} - \mathbf{x}_{A \rightarrow B}^t$ はガウス分布 $\mathcal{CN}(\mathbf{0}, v_{A \rightarrow B}^t \mathbf{I}_M)$ している。

概要

1. メッセージ伝播復調法の導入
2. メッセージ伝播復調法の導出
 - 並列干渉除去法 (PIC)
 - 近似的メッセージ伝播法 (AMP)
 - LMMSE-PIC
 - 期待値伝播法 (EP)
3. 数値実験

期待値伝播法 (EP)

EP [Minka 2001, Opper-Winther 2005, Céspedes *et al.* 2014]

モジュールA

$$\mathbf{x}_{A \rightarrow B}^t = \mathbf{x}_{B \rightarrow A}^t + \gamma(v_{B \rightarrow A}^t) \mathbf{A}^H \mathbf{\Xi}^{-1}(v_{B \rightarrow A}^t) (\mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{x}_{B \rightarrow A}^t),$$

$$v_{A \rightarrow B}^t = \gamma(v_{B \rightarrow A}^t) - v_{B \rightarrow A}^t.$$

モジュールB

$$\mathbf{x}_{B \rightarrow A}^{t+1} = v_{B \rightarrow A}^{t+1} \left(\frac{\mathbf{x}_B^{t+1}}{v_B^{t+1}} - \frac{\mathbf{x}_{A \rightarrow B}^t}{v_{A \rightarrow B}^t} \right), \quad \frac{1}{v_{B \rightarrow A}^{t+1}} = \frac{1}{v_B^{t+1}} - \frac{1}{v_{A \rightarrow B}^t}.$$

補正の目的

Aがユニタリ不変な行列の場合に、大システム極限で、前ページ記載の仮定が成立するように、補正を行った。

状態発展法

状態発展方程式 [Takeuchi 2017, Rangan *et al.* 2017]

$$\bar{v}_{A \rightarrow B}^t = \gamma(\bar{v}_{A \rightarrow B}^t) - \bar{v}_{B \rightarrow A}^t,$$

$$\bar{v}_B^{t+1} = \mathbb{E}[|x_1 - \eta^t(x_1 + z_1^t)|^2], \quad z_1^t \sim \mathcal{CN}(0, \bar{v}_{A \rightarrow B}^t),$$

$$\frac{1}{\bar{v}_{B \rightarrow A}^{t+1}} = \frac{1}{\bar{v}_B^{t+1}} - \frac{1}{\bar{v}_{A \rightarrow B}^t}.$$

平均二乗誤差

$$\lim_{N=\alpha M \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_B^t\|^2 = \bar{v}_B^t \text{ a.s.}$$

EPは自分に戻ってくるメッセージの影響を**完全に**除去し、
干渉雑音の分散を**完璧に**予想している。

中心極限定理

[Meckes 2012]

誤差ベクトル $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^N$ が以下を満たすとする。

$$\frac{1}{N} \mathbb{E}[\|\mathbf{e}\|^2] = \sigma^2 (\leq 1), \quad \mathbb{E}[|N^{-1}\|\mathbf{e}\|^2 - \sigma^2|] = \mathcal{O}(N^{-1/2}),$$

$$\sup_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N} \frac{\mathbf{u}^T \Sigma \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \leq 1 \quad \text{for } \Sigma = \mathbb{E}[\mathbf{e}\mathbf{e}^T].$$

eと独立でハール分布した正規直交する行ベクトルからなる行列 $U \in \mathbb{R}^{k \times N}$ による射影 $\mathbf{z} = U\mathbf{e}$ は、以下の条件を満たすならば、極限 $N \rightarrow \infty$ でガウス分布 $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 I_k)$ に収束する。

$$k < \frac{2 \log N}{\log \log N}.$$

E. Meckes, “Projections of Probability Distributions: A Measure-Theoretic Dvoretzky Theorem,” Geometric Aspects of Functional Analysis, Lecture Notes in Mathematics, Springer, vol. 2050, pp. 317-326, 2012.

概要

1. メッセージ伝播復調法の導入
2. メッセージ伝播復調法の導出
 - 並列干渉除去法 (PIC)
 - 近似的メッセージ伝播法 (AMP)
 - LMMSE-PIC
 - 期待値伝播法 (EP)
3. 数値実験

数値実験1

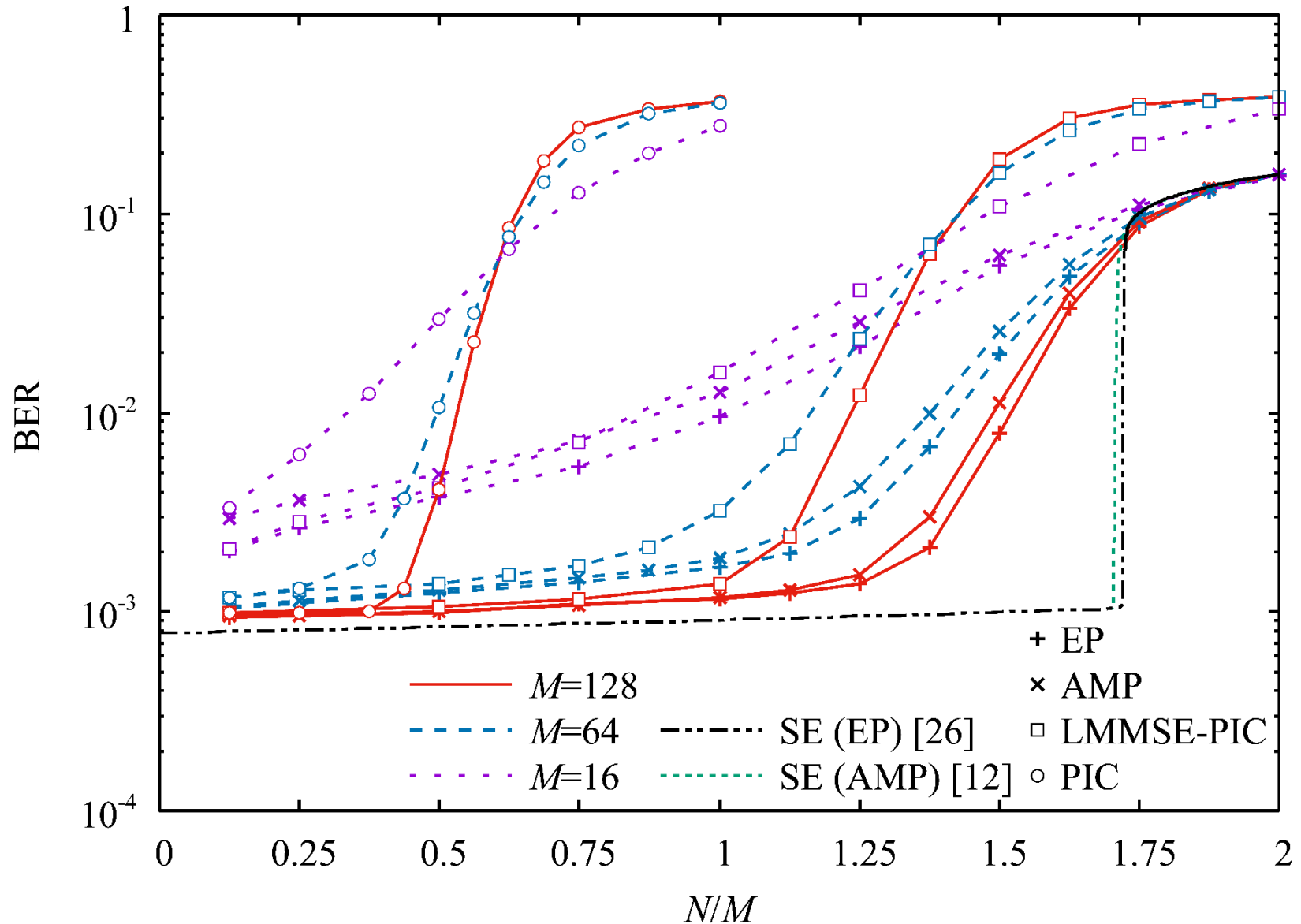
変調方式	QPSK
信号対雑音比(SNR)	10 dB
通信路	i.i.d. レイリーフェーディング
復調反復回数	50回

通信路行列

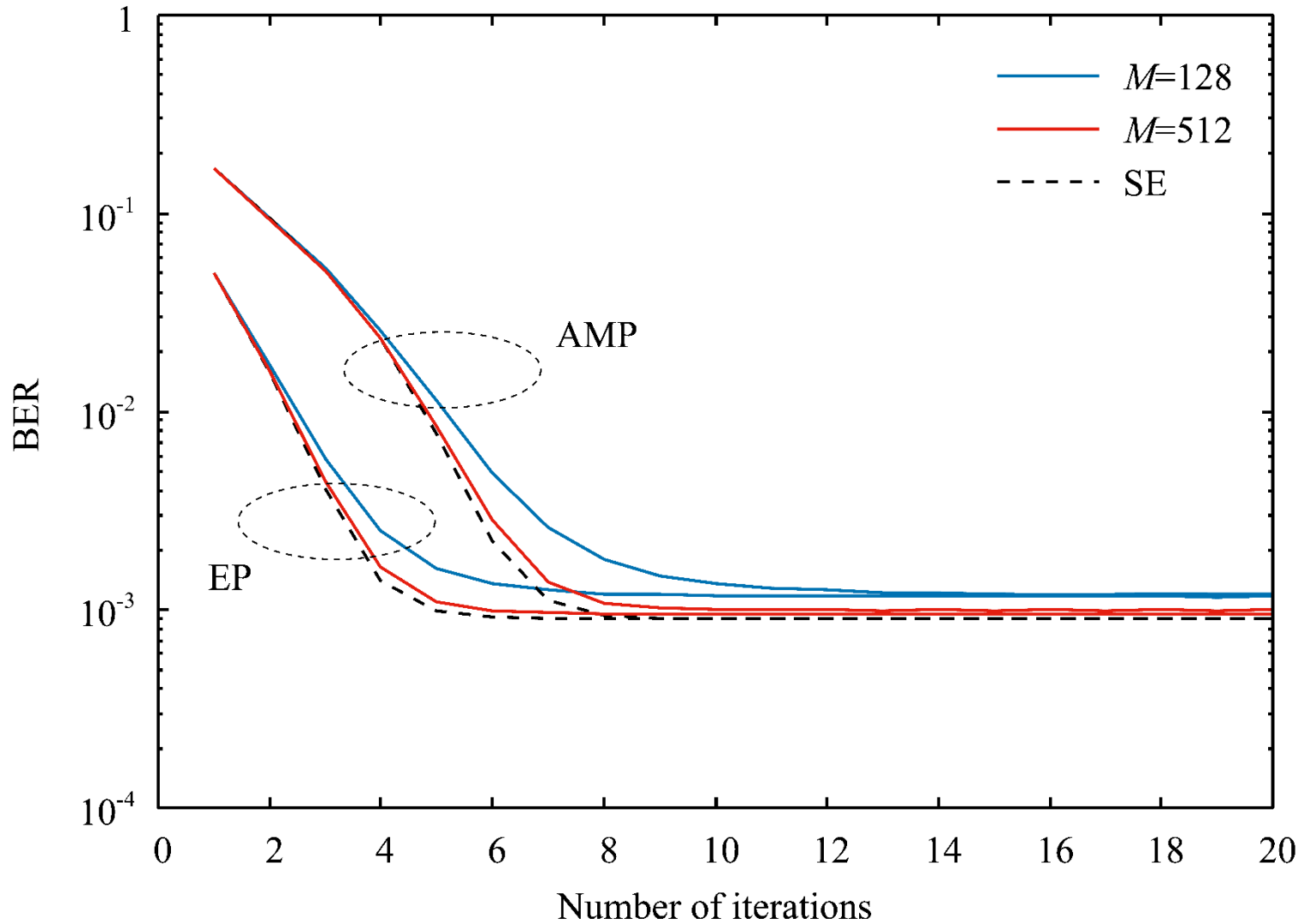
$$A = \frac{1}{\sqrt{M}} W$$

W は標準複素ガウス行列

数值実験結果



数值実験



$$N/M = 1$$

数値実験2

変調方式	QPSK
信号対雑音比(SNR)	10 dB
通信路	送信側で空間相関
復調反復回数	50回

通信路行列

$$A = \frac{1}{\sqrt{M}} W \sqrt{T}$$

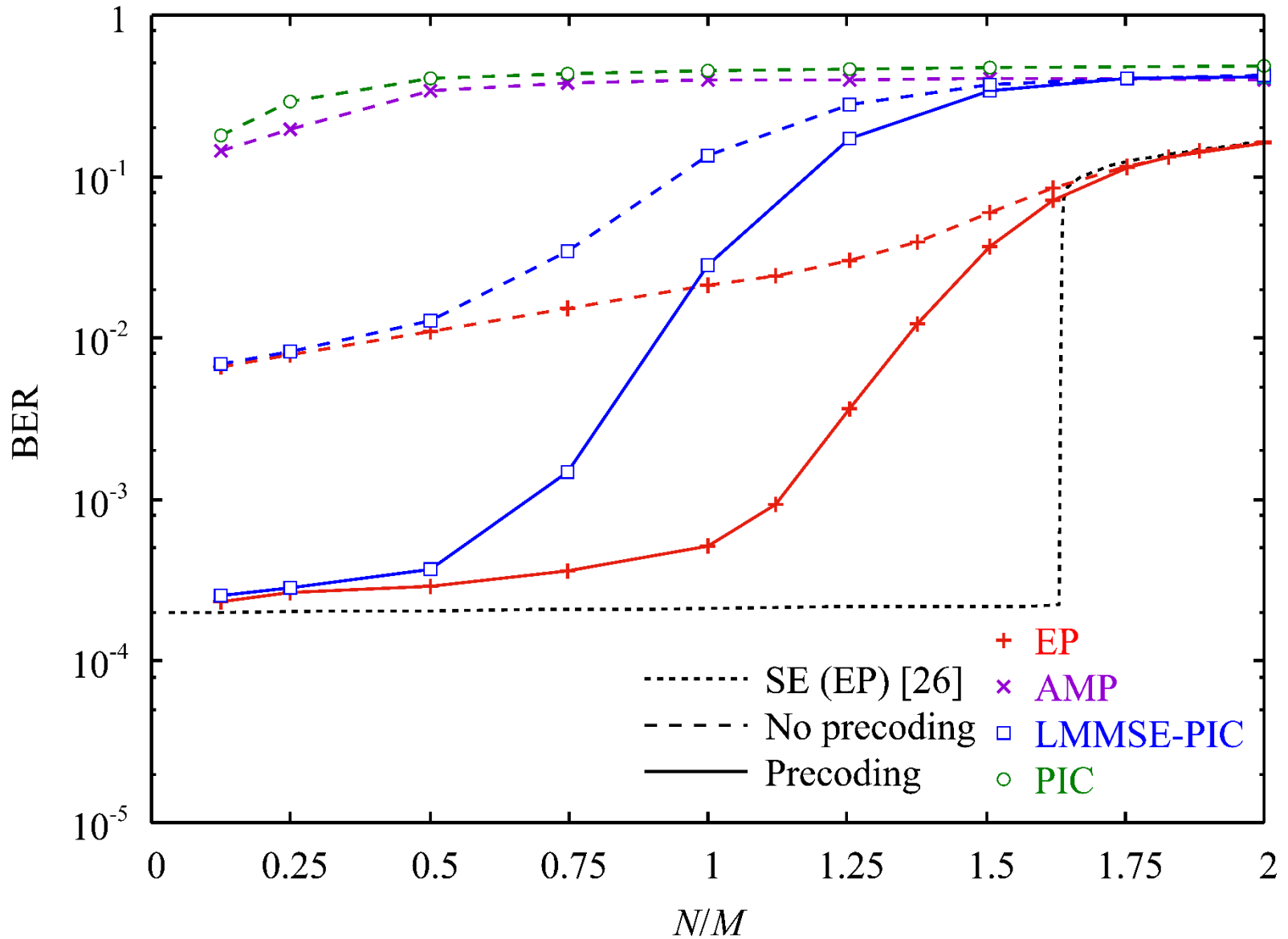
W は標準複素ガウス行列 T は実テプリッツ共分散行列

プレコーディング

$$x = Pd$$

d はデータベクトル P はハール・ユニタリ行列

数值实验结果



まとめと今後の課題

	適用範囲	適用範囲内の性能	計算量
AMP	狭い	ベイズ最適	低い
EP	広い？	ベイズ最適	高い

大システムでの性能が良いことに注意

今後の課題

- EPの計算量を削減することは可能か？
共役勾配法による近似 [Takeuchi-Wen 2017]
- EPの適用範囲はどこまで広いのか？
符号付き置換に関して不変な行列？（検討中）