

ラジアルライン スロットアンテナ (RLSA)

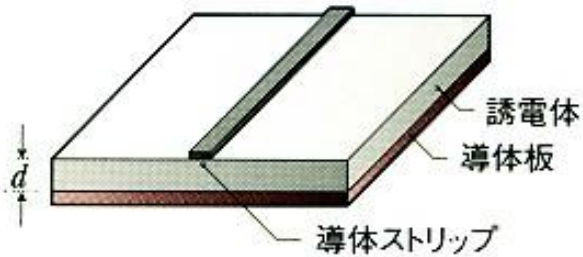
発明の背景と実用化の経緯

東京工業大学

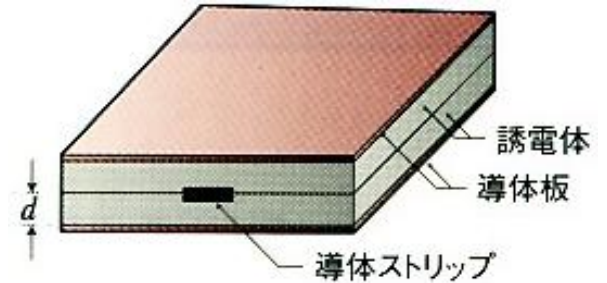
後藤 尚久

発明の背景

アレーアンテナの素子の給電線

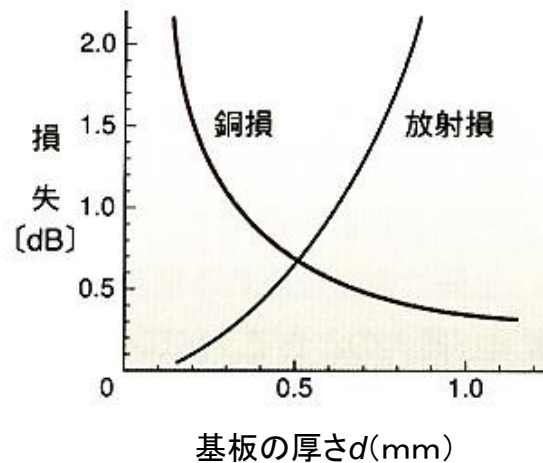


(1) マイクロストリップ線路



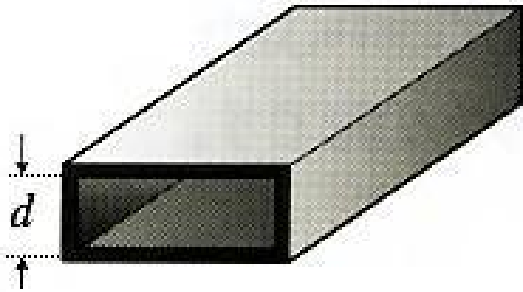
(2) トリプレート線路

村田孝雄, 王丸謙治(NHK技研)
(周波数12GHz)



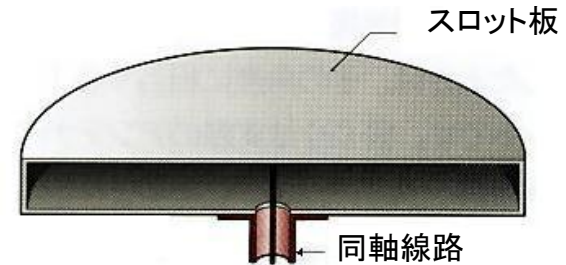
放射損のない素子アンテナの給電回路

素子アンテナは管壁に切るスロット



方形導波管

密閉した長い給電回路のため高価



ラジアル導波管

給電線は同軸線路1本のため安価だが
水平方向には多モード線路になる

RLSAを発明する以前の経験

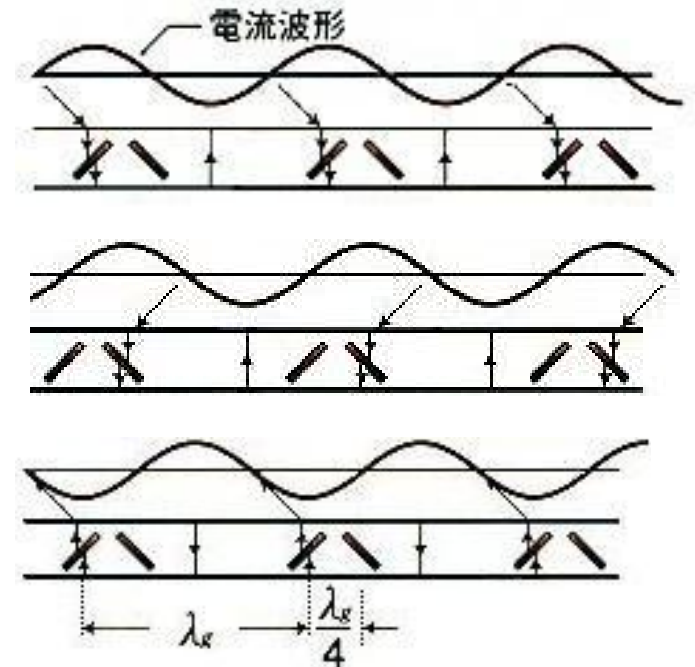
1. 円偏波導波管スロットアンテナが必要な理由
2. 右旋円偏波アンテナは左旋円偏波を受信する
3. このため防衛用レーダは円偏波導波管スロットアンテナを利用
4. 導波管スロットアンテナは水平偏波のため偏波変換板を利用



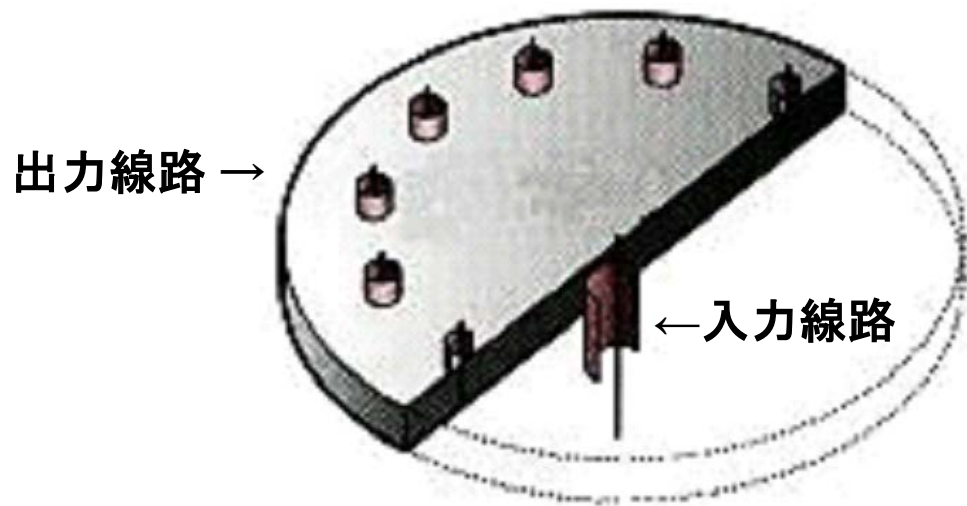
提案した円偏波導波管スロットアンテナ*
(素子アンテナの重みはスロット長による)

スロットの長さによって重みをつける
のは世界に実用例はない

* 関、後藤 “円偏波用導波管スロット・アンテナについて — 矩形導波管の狭管壁上に設けられた円偏波用スロット・ペアの理論解析 —” 信学技法、A・P 79-2 (1979年4月20日)



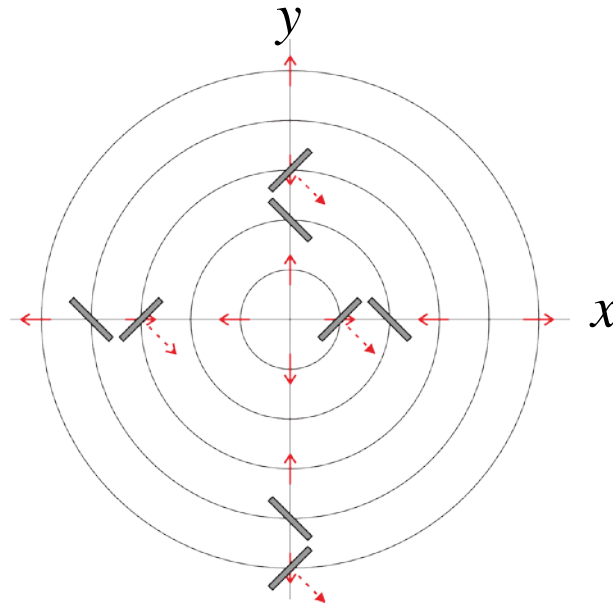
360° 走査する円形アレーアンテナの研究 (多モード線路のため失敗した例)



円形アレーアンテナの給電回路

最初のRLSA

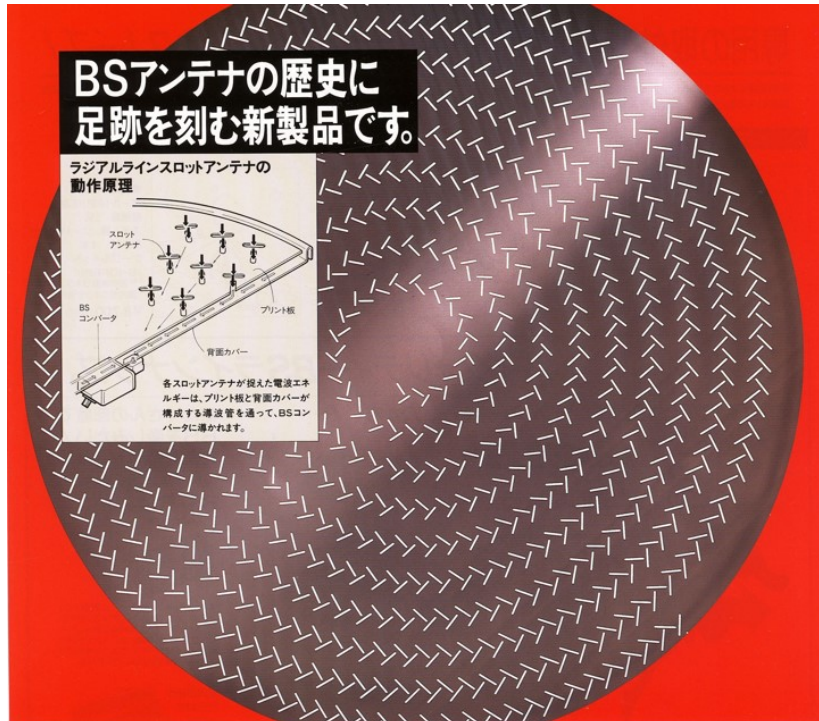
原理の説明図



- ① 赤い矢印は電流の方向
- ② 点線は放射電界の方向
- ③ 反時計方向に回転
- ④ 右旋円偏波

1. 上の説明図の x 軸から $\pm 45^\circ$ 傾いた直線上にハの字を追加した8素子のRLSAを1980年4月に修士課程1年生の研究テーマとする
2. 円偏波の指向性が得られた実験結果を1980年8月に次の文献で発表した
後藤、山本 “ラジアル線路を利用したスロットアンテナ” 信学技法、A・P80-57

衛星放送受信アンテナ：RLSAの完成品(1989年)



アイデアの発想(8素子)から実証
実験まで5ヶ月、それから
商品化(2298素子)まで9年

2298個のアンテナが集合した、まったく新しい原理のアンテナです。

鳥の足あとのように見える「八」の字型のひとつひとつが、全部アンテナです。合計で2298個。コンピュータ解析によって最適形状と最適な配置が算出されています。高品質で信頼性の高いこのアンテナは、東京工業大学後藤尚久教授が発明されました。

歴史に培われたアンテナの高感度技術が息づく、トップレベルの受信性能。

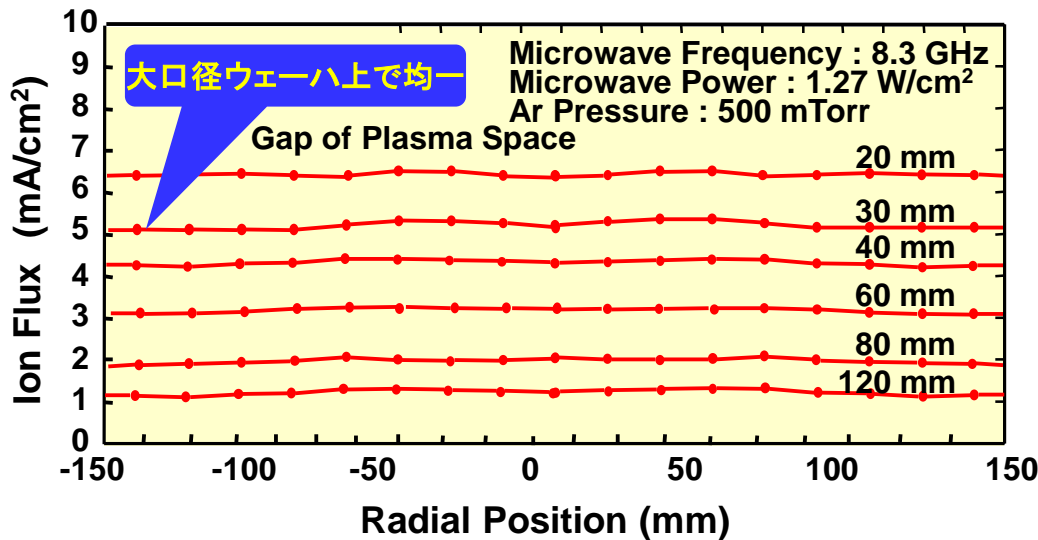
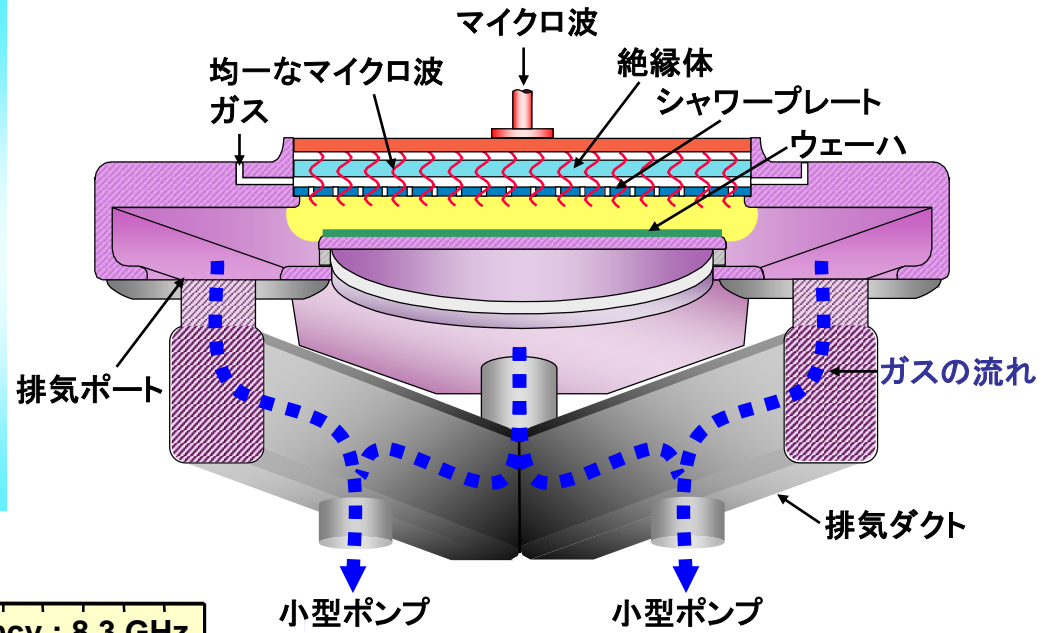
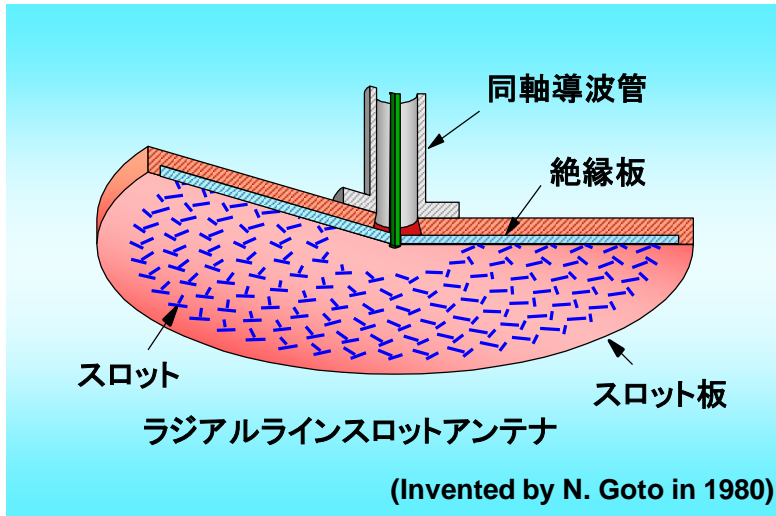
2298個のアンテナ素子は、極薄のフレキシブルプリント板に精密エッチング成形され、捉えた電波は電波のままで導波管を通過して中心に集められます。このためロスが無く、33.6dBの高いアンテナゲインを実現。BSコンバーターは、雑音指数1.0dBの超低雑音タイプ。高品質の映像、ハイビジョン時代が求める最先端のアンテナです。アンテナのトップメーカー、アンテナの技術で商品化しました。

BS RADIAL LINE SLOT
45cm型BS平面アンテナ
¥37,000(税別) **BS-AF045**



仕様 ●利得：33.6dB ●BSコンバーター雑音指数：1.0dB ●仰角調整範囲：25～62度(北海道から九州まで対応) ●取付マスト径：32～43mm ●重量：2.2kg

ラジアルラインスロットアンテナを用いたマイクロ波励起プラズマ装置

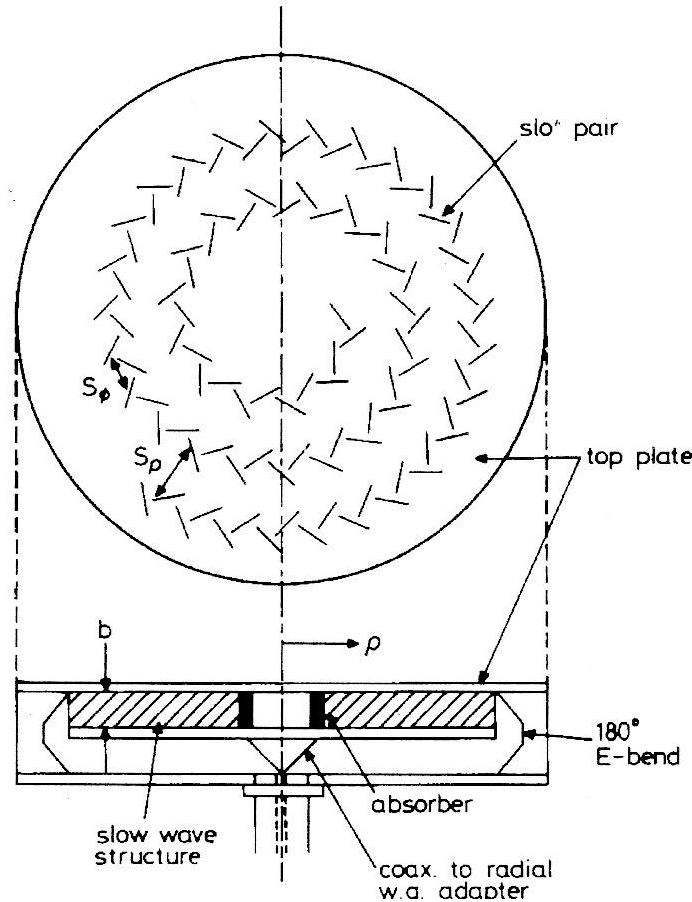


- Applicable for
- プラズマ酸化 (Plasma oxidation)
 - プラズマ窒化 (Plasma nitridation)
 - プラズマ酸窒化 (Plasma nitro-oxidation)
 - ポリシリコン / メタル RIE (Polysilicon / Metal RIE)

なぜ9年を要したのか？

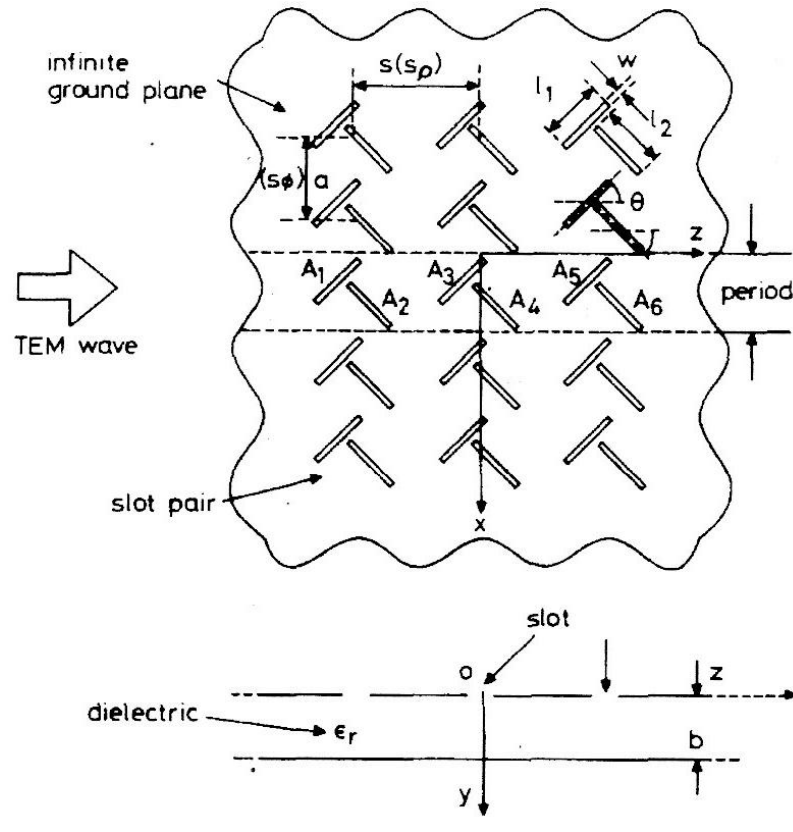
- ・ ラジアル線路は ϕ 方向には多モード線路になるから
- ・ 素子の給電回路として多モード線路を利用アンテナを私は知らない
- ・ 水平偏波導波管スロットアンテナではスロットの角度で重みをつけている
- ・ 円偏波のためスロット長で重みをつける必要のため(スライド4)
- ・ 衛星通信に利用された RLSA → Space Proven (後のスライドで説明)
- ・ 軸対称構造の RLSAは安定した動作をする (後のスライドで説明)

RLSAの開発過程：2層にして外側から給電



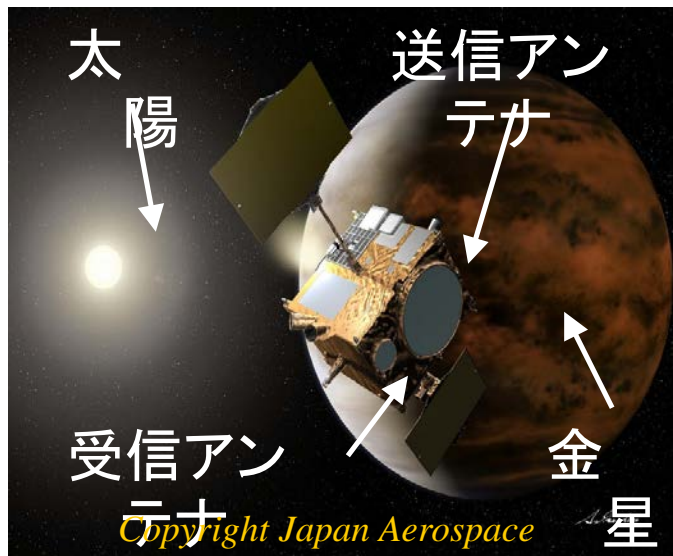
スロットがないとき上側のラジアル線路の電力密度は $1/p$ で増大する。スロットから電波を放射するため、同じ長さのスロット対を用いても開口分布は一様に近づく

スロット長の設計等に**周期構造近似**の利用



J. Hirokawa, M. Ando, N. Goto, "Analysis of slot coupling in a radial line slot antenna for DBS," IEE Proc., vol. 137, Pt. H, No. 5, Oct. 1990

金星探査計画 PLANET-C/あかつき 要求仕様



Copyright Japan Aerospace
Exploration Agency

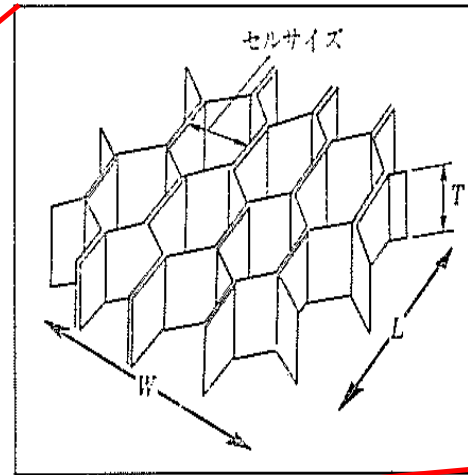
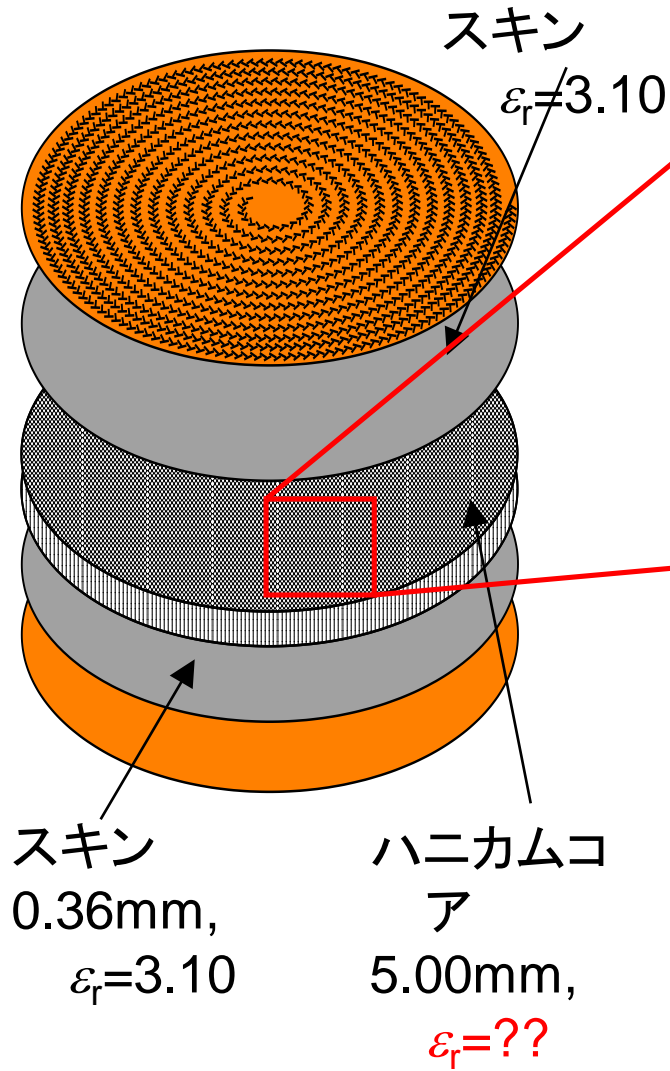
PLANET-C/あかつき

イメージ

2010年夏 打ち上げ予
定

	送信	受信
周波数	8.41GHz	7.15GHz
直径	900mm (約 $25.2\lambda_0$)	300mm (約 $7.2\lambda_0$)
利得 (効率)	>35dBi (>50%)	>20dBi (>20%)
帯域	>5MHz	>5MHz

ハニカム構造の材料特性1



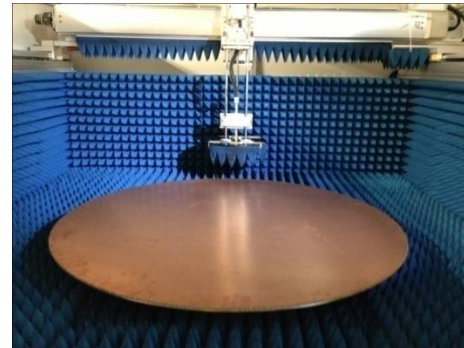
セルサイズ $.1 \sim 0.2\lambda_0$
 ペーパー厚 $0.003\lambda_0$

伝送路としてのハニカム構造の

- ✓ 誘電率
- ✓ 損失
- ✓ 伝搬方向の異方性

を確認し、一様な材料として近似

Study of Material Loss in mm-Wave RLSA with Honeycomb Structure



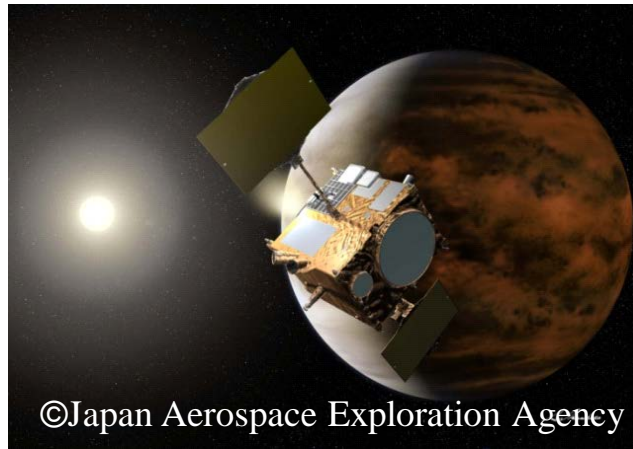
Tung Nguyen¹, R. S. Rushanthi¹, Y. Takano¹, K. Sakurai¹, T. Hirano¹, J. Hirokawa¹, M. Ando¹, O. Amano², S. Koreeda² and T. Matsuzaki²

¹Tokyo Institute of Technology

²NEC-Toshiba Space Systems

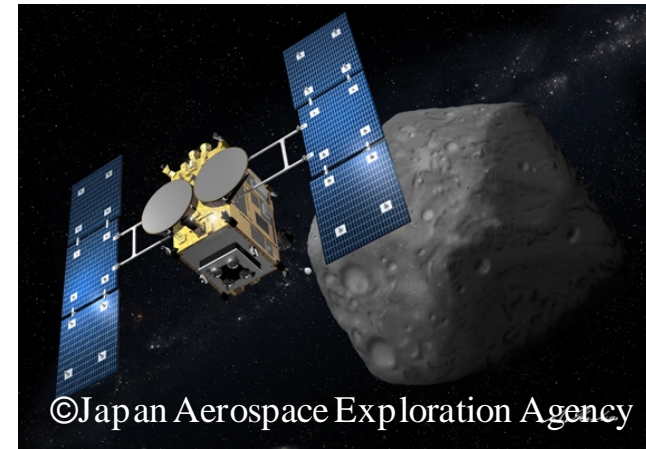
Background – Satellite on-board RLSA

Planet C (Akatsuki) - 2010



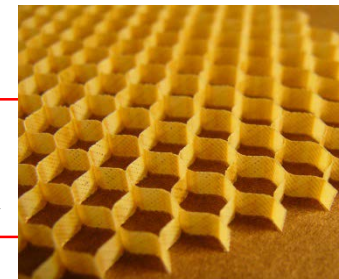
Frequency	8.4GHz
Gain	>35.0dBi
Bandwidth	5.0MHz
Diameter	90cm
Weight	1.16kg

Hayabusa 2 Plan - 2014

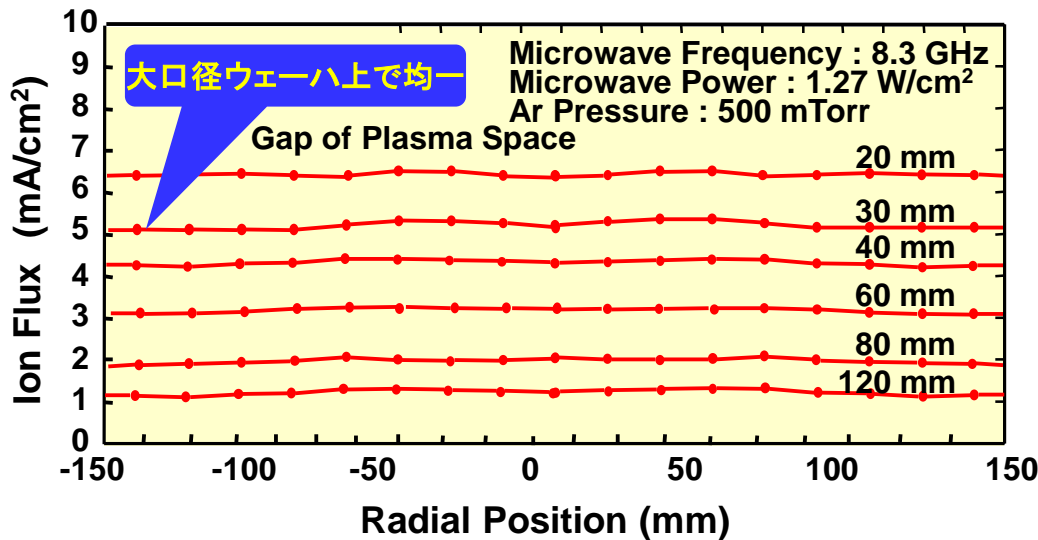
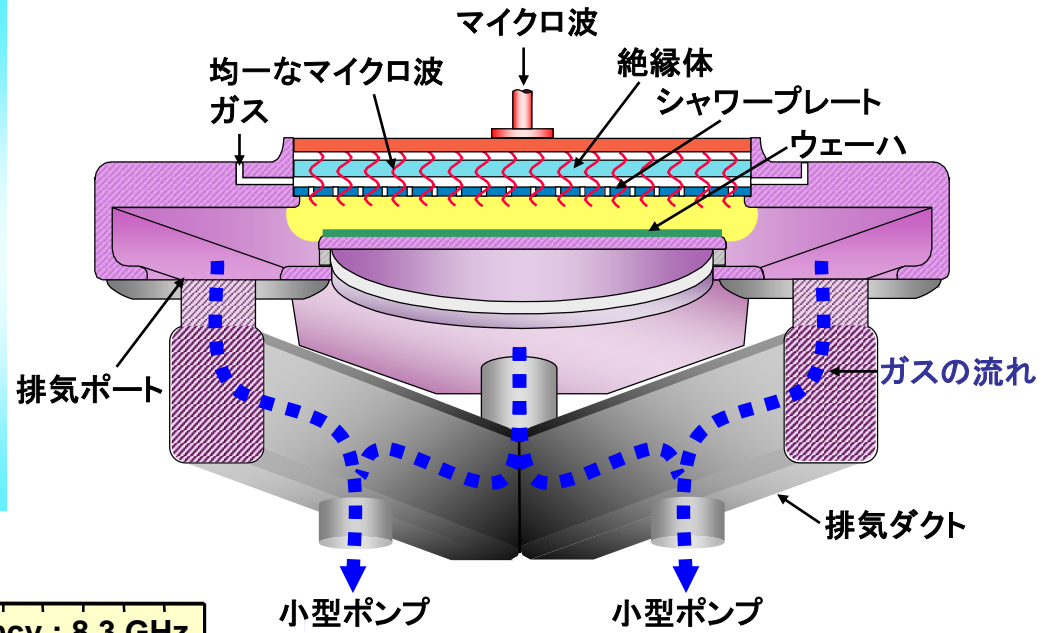
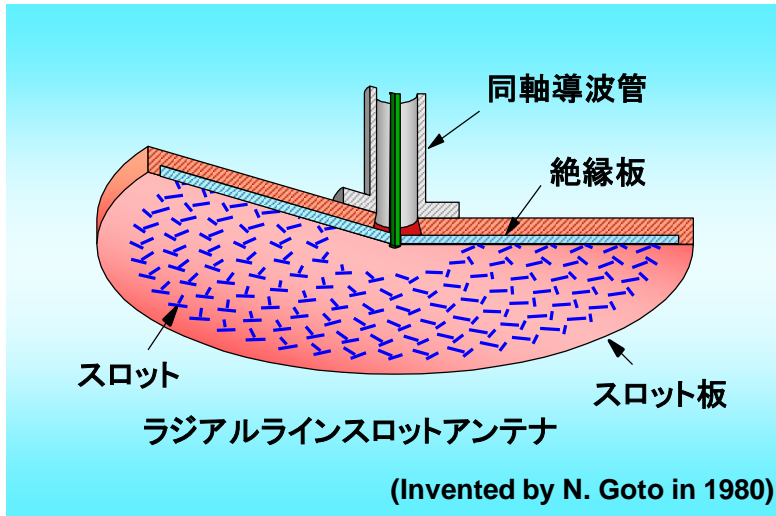


Frequency	32.0GHz
Gain	>44.1dBi
Bandwidth	5.0MHz
Diameter	90cm
Weight	1.16kg

- ☺ Weight Reduction
- ☺ Mechanical Strength Enhancement



ラジアルラインスロットアンテナを用いたマイクロ波励起プラズマ装置

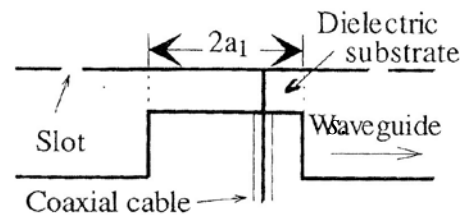


- Applicable for
- プラズマ酸化
 - プラズマ窒化
 - プラズマ酸窒化
 - ポリシリコン / メタル RIE

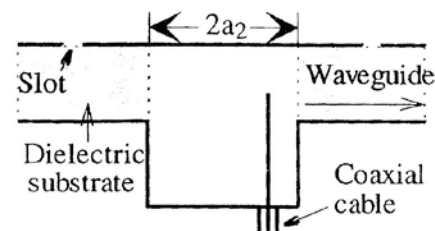
同心円 RLSA の開発

ラジアル線路上の分布
従来の RLSA : 位相は同心円、素子配列はスパイラル
同心円 RLSA : 位相はスパイラル、素子配列は同心円

回転モード $e^{-j\phi}$ (ϕ は円柱座標、スパイラル位相) 励振器(下記文献)



(a) Cavity with a magnetic wall.



(b) Cavity with an electrical wall.

S. Hosono, J. Hirokawa, M. Ando, N. Goto and H. Arai "A rotating mode radial line slot antenna fed by a cavity resonator," *IEICE Trans. Commun.*, vol. E78-B, No. 3 March 1995

共振器 (Cavity) 内の 電磁界

$$E_z = -j\omega\mu\psi, \quad \therefore H_\phi = -\frac{\partial\psi}{\partial\rho} = -k J_1'(u) e^{-j\phi} \quad \because u = k\rho, \quad k = 2\pi / \lambda$$

1. 第1式はTM波の電界を表す標準法(下記文献)
2. これをマクスウェルの方程式の電界を微分する式に代入したのが第2式
3. 第3式は磁界を微分する式を用いて電界と磁界を消去した1次のベッセルの微分方程式の解

磁壁モデル(前スライドの上側共振器)、共振器内の誘電率を無視すると

$$H_\phi = J_1'(ka_1) = 0 \quad \therefore ka_1 = 1.8412$$

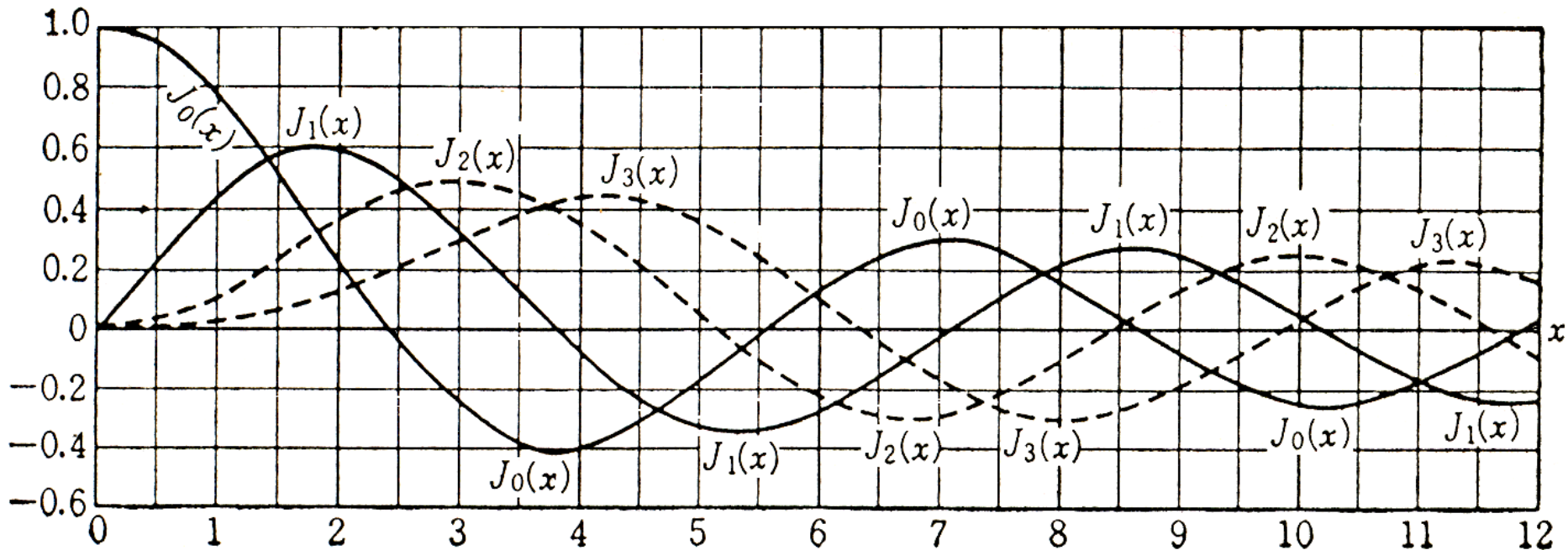
導体壁モデル(前スライドの下側共振器)、第1段の第2式に対応する式は次のようになる

$$H_\rho = \frac{\partial\psi}{\rho\partial\phi} = -(k/u) J_1(u) e^{-j\phi} \quad \therefore H_\rho = J_1(ka_2) = 0 \quad \therefore ka_2 = 3.8317 \quad a_2 / a_1 = 2.08$$

磁壁上で外側を向くポインティングベクトル $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = -E_z H_\phi = 0$

後藤尚久、“ラジアル線路を用いた同心円アレーアンテナ,” 信学技法、A・P2015-158(2015-12)

ベッセル関数



$$J_1'(x) = J_0(x) - J_1(x)/x = J_0(x) \quad \text{when } J_1(x) = 0 \quad (\text{導体壁モデル})$$

$$J_1'(x) = 0 \quad (\text{磁壁モデル})$$

従来のRLSA(同相線は同心円)のラジアル線路内の電磁界

前スライド第1段に対応する式は次のようになる:文献(1)

$$E_z = -j\omega\mu\psi, \quad \therefore H_\phi = -\frac{\partial\psi}{\partial\rho} = -k\frac{d\psi}{du}, \quad \psi = H_0^{(2)}(u), \quad H_\rho = 0$$

第4式は0次のハンケル関数で、電磁界は ϕ の関数でないため第5式が得られる

このハンケル関数は文献(2)の145ページと154ページから次のようになる

$$\psi = H_0^{(2)}(u) = \sqrt{2/\pi u} e^{-j(u-\pi/4)} \left(1 + j\frac{1}{8u} - \frac{9}{128u^2} + \dots \right), \quad u = k\rho$$

括弧内の第1項だけで近似すると、一段目の磁界は次のようになる

$$H_\phi = jk\sqrt{2/\pi u} e^{-j(u-\pi/4)} - k e^{-j(u-\pi/4)} \frac{d}{du} \sqrt{2/\pi u}$$

この右辺第1項は、一段目の第1式と二段目から ψ を消去すると

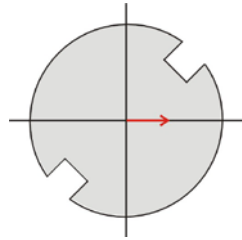
$$H_\phi = jk\sqrt{2/\pi u} e^{-j(u-\pi/4)} = -E_z/\eta, \quad \eta = \sqrt{\mu/\varepsilon} \text{ (電波インピーダンス)}$$

(1) 後藤尚久、“ラジアル線路を用いた同心円アレーアンテナ”、信学技報、A・P2015-158(2015-12)

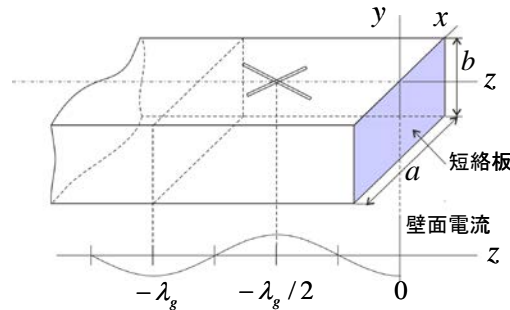
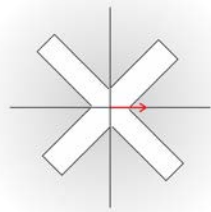
(2) 森口、宇田川、一松、数学公式Ⅲ、岩波書店、1996

定在波電流で励振する円偏波アンテナ

(赤い矢印 \rightarrow は電流の方向)



広く知られた一点給電円偏波パッチアンテナ



円偏波導波管スロットアンテナ
2000年度修士1年生のテーマ
(成果は下記文献)

三浦、鈴木、小塩、後藤、“長さの異なるクロススロットを用いた円偏波導波管スロットアンテナ、”
2001年信学総大, b-1-77(2001年3月)

上の文献を応用して発表されたのが次の文献

S. Sudo, T. Hirano, J. Hirokawa, M. Ando, “A radial line slot antenna fed by a waveguide through a crossed slot,” *IEICE Trans. Commun.*, vol.E86-B, no.10, pp.3063-3070, Oct. 2003

長さの異なるクロススロットを用いた円偏波導波管スロットアンテナ

A Waveguide Slot Antenna for Circular Polarization Using Cross Slots of Different Length

三浦 庸平 鈴木 浩一郎 小塩 立吉 後藤 尚久
Yohei MIURA Koichiro SUZUKI Tatsukichi KOSHIO Naohisa GOTO
拓殖大学 工学部 電子工学科

Dept. of Electronics and Systems, Faculty of Engineering, Takushoku University

1. まえがき

導波管スロットアンテナのスロット長によって、放射電界の振幅および位相が変化する[1]。本稿ではこの特性を利用し、同振幅となる2本の長さの異なるスロットをクロスさせることにより、円偏波アンテナが得られることを解析及び実験により明らかにした。

2. 構造

導波管クロススロットアンテナの構造を図1に示す。導波管端部はショートしており、使用周波数に 4GHz を選んだため、スロットの中心部を端部より $49.09\text{mm}(\lambda_g/2)$ の位置に設けた。

3. 解析及び測定

図2には、管軸に対して 45 度傾いた1本のスロットより正面方向に放射される電界の振幅と位相の解析結果を、スロット長を横軸として示す。スロット幅は 2mm とした。

これより同振幅で位相差をもつ2本の長さの異なるスロットを選び出し、それぞれをクロスさせ解析した結果を図3に示す。横軸は図2の位相グラフより、同振幅となる2本のスロットの相対的な位相差で表す。スロット長が各 32.31mm, 36.34mm で位相差が約 62 度となり、このとき正面方向の軸比は約 0.1dB となった。

クロススロットによる円偏波の放射を確認するためアンテナを試作した。しかし解析とは異なる軸比となったため、試作に用いるスロットの設計はモーメント法によるソフトを使用した。位相差を 62 度にするためのスロット長は各 34.12mm, 37.14mm となり、この試作アンテナの放射パターンの実験値を図4に示す。測定では導波管本体による回折波の影響により偏波が非対称となるため、1辺 3λ の正方形地板を装着している。回折波の影響によりリップルが立っているが、正面方向で 0.5dB の軸比が得られている。

これまで、同心円素子配列ラジアルラインスロットアンテナの円偏波給電回路について検討してきた[2]。このアンテナにクロススロットを給電部として使用し、測定した放射パターンの実験値を図5に示す。これにより低損失一次輻射器としての有効性を示した。

4. まとめ

長さの異なる2本のスロットを垂直にクロスさせたアンテナを提案し、円偏波の放射を解析と実験の両面より確認した。

謝辞 解析プログラムを提供された東京工業大学の広川二郎助教授に感謝する。

参考文献

- [1] 常光康弘, 小塩立吉, 後藤尚久, 信学総大 '00 B-1-132
- [2] 石井光治, 小塩立吉, 後藤尚久, 信学総大 '00 B-1-128

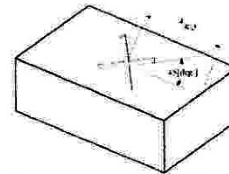


図1 クロススロット導波管アンテナ

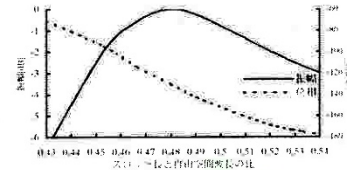


図2 1本のスロットによる放射電界の振幅と位相(HFSS)

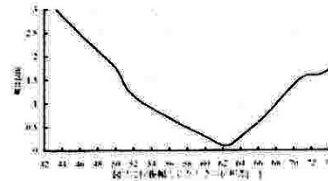


図3 クロススロットの軸比(HFSS)

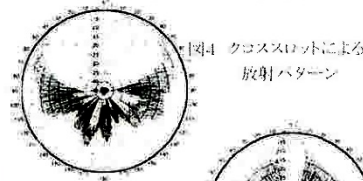


図4 クロススロットによる放射パターン

図5 RLSAによる放射パターン

4.5.3 共振回路の性質

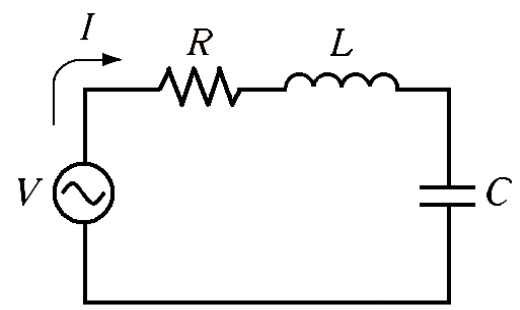


図4-18 等価回路 (Rは放射抵抗)

$$I = \frac{V}{R + jX}, \quad X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

$$X = 0 \rightarrow I = V/R = I_0 \rightarrow f_0$$

$$X = -R \rightarrow I = I_0 e^{j\pi/4} / \sqrt{2} \rightarrow f_1$$

$$X = R \rightarrow I = I_0 e^{-j\pi/4} / \sqrt{2} \rightarrow f_2$$

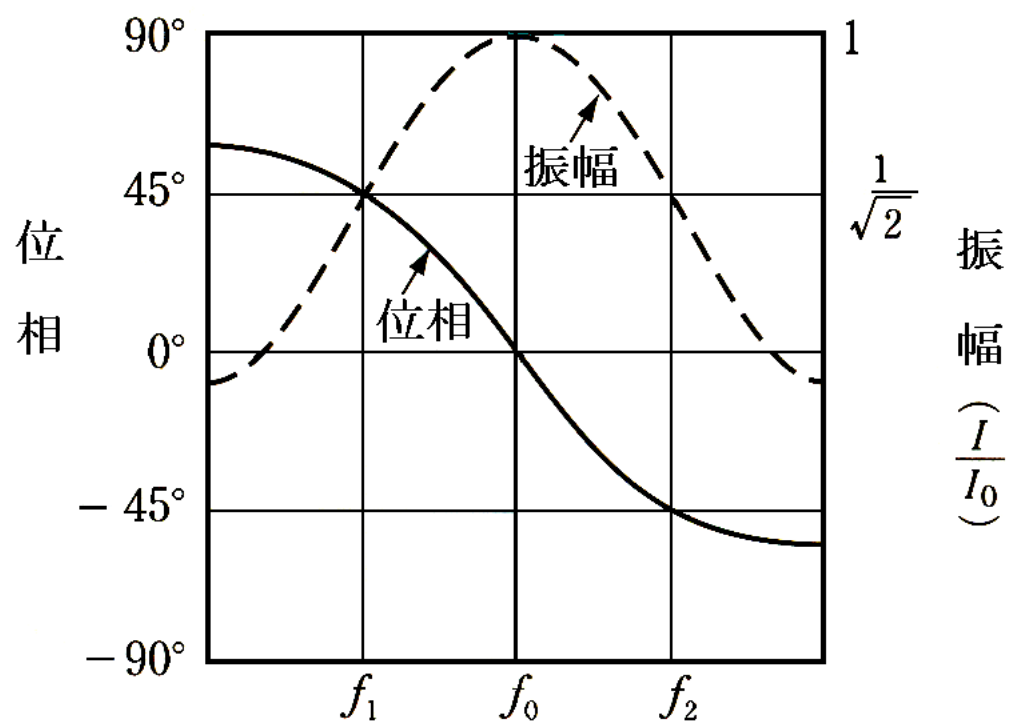


図4-19 方形パッチに流れる電流の周波数特性

4.7.1 共同回路を流れる電流の周波特性を利用

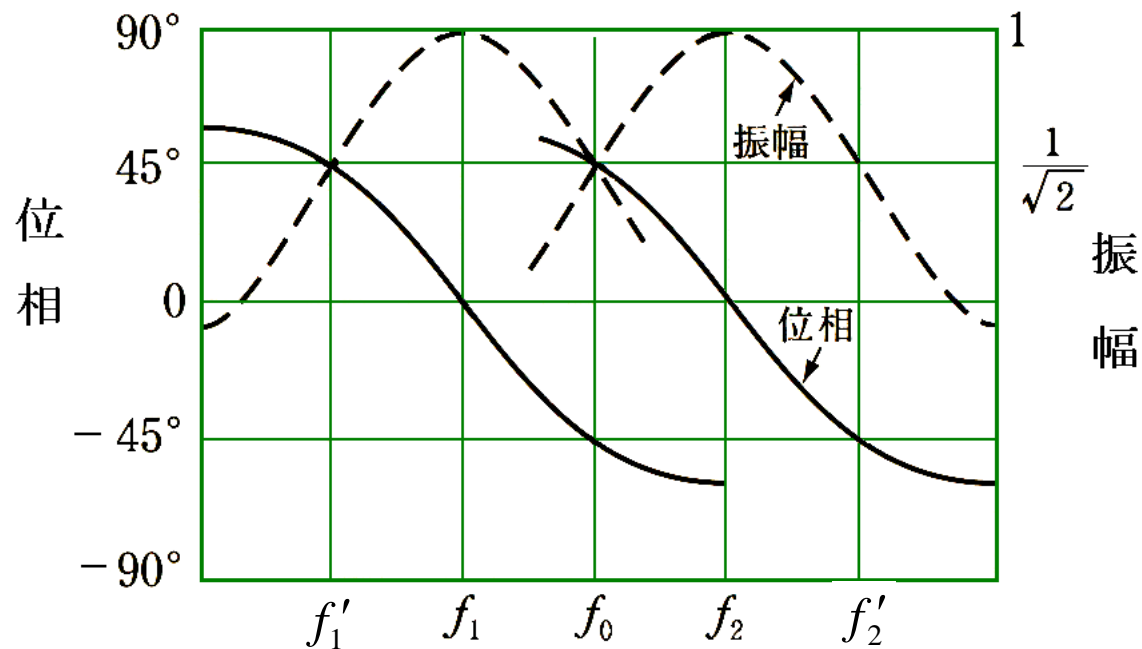


図4-25 共振周波数の異なるパッチに流れる電流の周波数特性

円偏波アンテナの交流理論による表示法

[x 方向(i 方向)のダイポールより y 方向(j 方向)のダイポールの位相が 90° 遅れるとき]

交流理論では $i - j j$ 、時間の関数として $f(t) = \text{Re}[(i - j j) e^{j\omega t}] = i \cos \omega t + j \sin \omega t$
これは xy 面上で反時計方向に回転して z 方向(紙面に垂直に手前方向)に進むから、電波の進む方向を後ろから見て時計方向となり右旋円偏波になる

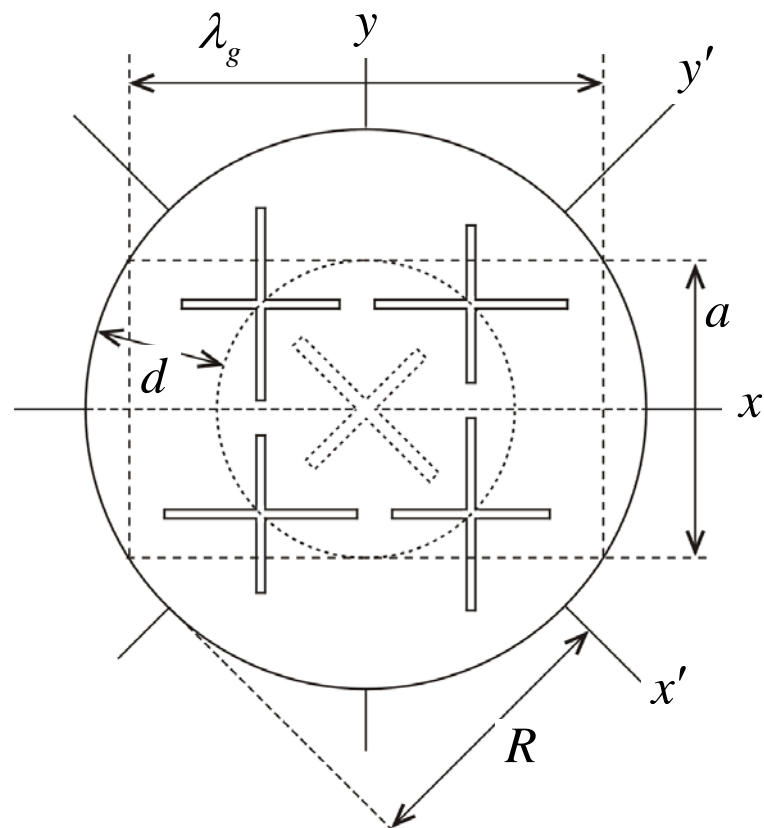
ラジアル線路上での位相分布

ラジアル線路の導体板間の平面の原点に x 方向と y 方向を向いたスロットがスライドのように1個だけあるとき、それらが平面内に作る電界は円筒座標で E_0 を定数として次のように近似でき、回転モードになることがわかる

$$E_z = E_0 (\cos \phi - j \sin \phi) = E_0 e^{-j\phi}$$

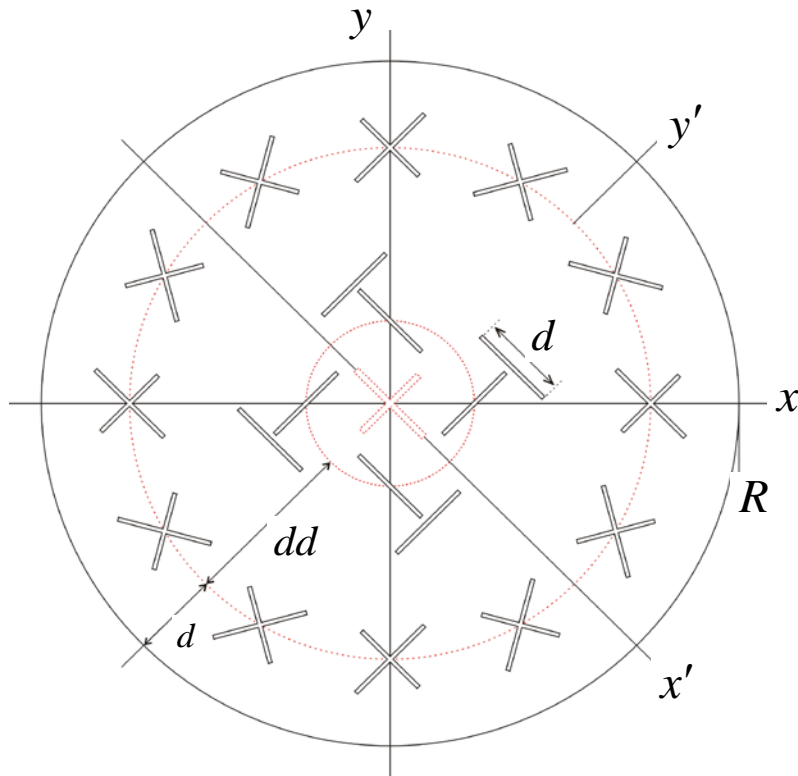
近似というのは線路内の指向性が正確に $\cos \phi, \sin \phi$ となるのは微小ダイポールの場合のみだからである

クロススロットを用いた最小のRLSA

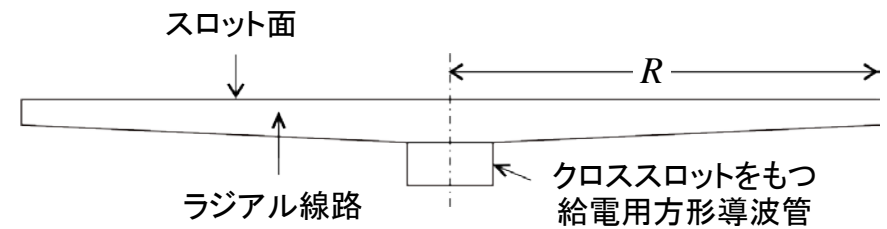


1. 中心の直交点線はスライド20の導波管のスロットである
2. このスロットアンテナがラジアル線路の給電源となる
3. このラジアル線路の上面の導体板に切った実線のクロススロットが定在波で動作する円偏波アンテナである
4. 半径 R の大きい円はラジアル線路を短絡する円板である
5. 短絡板とクロススロットの中心の間隔 d の大きさは半波長になる
6. このため半径 R の大きさは点線の円の半径できまる
(点線の円は4個のクロススロットの中心を結ぶ線)
7. なお、ラジアル線路内が回転モードになるのは前スライドの下段に説明した

クロススロットを整合負荷とする同心円 RLSA



ラジアル線路の高さで重みをつける RLSA (下記文献)



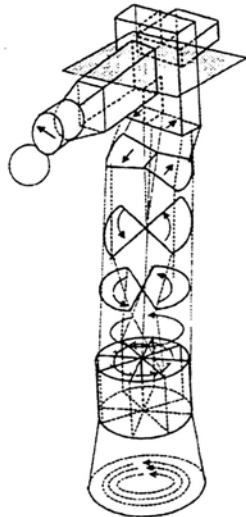
1. 半径 R のラジアル線路の終端は短絡する
2. 放射素子であるT字型のスロット長は全て共振波長とする
3. 高利得のための素子の重みなどは、上図のように導体板間隔が一様に変化するラジアル線路でつける

小さい点線の赤い円内は前スライドに
同じ、 d は約半波長、 dd は約1波長

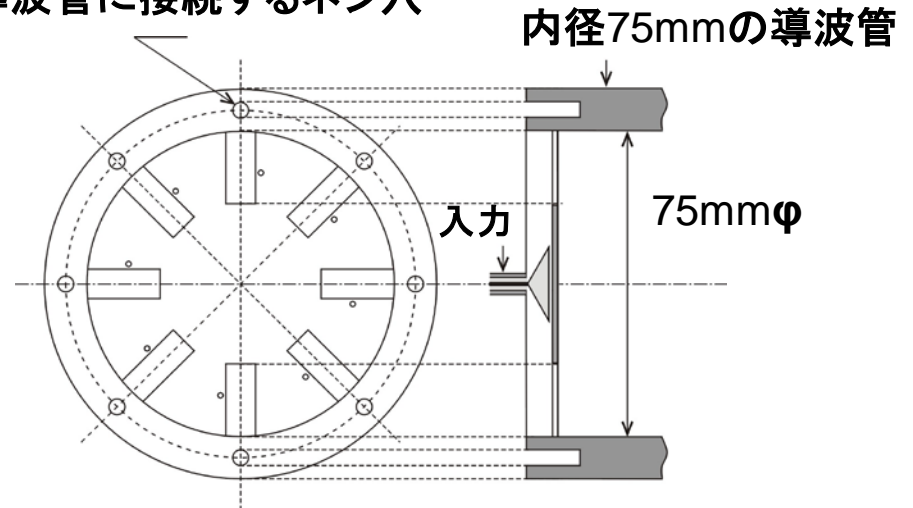
後藤尚久、“ラジアル線路を用いた同心円アレー
アンテナ（共振スロットを用いたRLSAを目指して）”
信学技報、A・P2015-158(2015-12)

RLSAの半導体製造装置以外の応用：液面計

円形導波管のTE₀₁モード励振



導波管に接続するネジ穴



従来の円形TE₀₁モード励振器

上のTE₁₁モードから下のTE₀₁モードへ

円形TE₀₁モード励振器の研究(成果は下記文献1.)

2003年度修士1年生の研究テーマ

長方形の幅広スロットについては下記文献2.

1. 幡野、小塩、石上、後藤、“広帯域のラジアルライン円形TE₀₁モード励振器”、2004年信学総大、
B-1-157 (2004年3月)

2. J.Hirokawa, H.Arai, N.Goto, “Cavity-backed wide slot antenna” IEE **Proc.**, vol. 136. Pt. H, No. 1, Feb. 1989

広帯域ラジアルライン円形TE₀₁モード励振器 A Wideband Radial Line Exciter for TE₀₁ Mode of Circular Waveguides

幡野 貴彦 小塩 立吉 石上 治 後藤 尚久

Takahiko Hatano Tatsukichi Koshio Osamu Ishigami Naohisa Goto

拓殖大学工学部情報エレクトロニクス学科
Electronics and Computer Systems, Faculty of Engineering, Takushoku University

1. はじめに

ラジアル導波路を利用し、TE₀₁モードの電界を得る薄型励振器の開発を行っている[1]。昨年、ラジアル方向に切ったスロット近傍に励振ピンを立てることにより、TE₀₁モード励振器となり得ることを確かめた。今回はこの基本モデルの改良を行い、9.5~11GHzの広帯域化の見込みが確認できたので報告する。

2. 原理と構造

提案するTE₀₁モード励振器の構造図を図1に示す。ラジアル導波路の中心の下から同軸給電し各スロットの横にピンを立て励振する。各スロットから放射された電界は、すべて同振幅で、周方向を向いているため、TE₀₁モードを励振することができる。昨年の基本モデルから、同軸給電部は2段階のテーパー状とした。ラジアル導波路の厚さは、11GHzの $\lambda/4$ に近い6.5mmとした。スロットは長さ18.5mm幅8mmとし、励振ピンは、太さ2.8mmφのショートピン型とし、スロット中心から5.6mm離し、やや中心寄りに立て、広帯域化を図った。

3. 試作結果

図2に試作したTE₀₁モード励振器のリターンロスの測定結果と解析結果を示す。解析結果に比べて測定結果の共振周波数が低い方に5%ほどシフトしたが、リターンロス-20dB以下が10%の広帯域になっていることがわかる。

同様に、図3に放射パターンを示す。TE₀₁モード励振器の放射パターンは、解析値、測定値ともほぼ一致した。0度のときの利得が約-40dBほど落ち、双峰ビームとなった。このことから、TE₀₁モードが励振していることがわかる。約40度のヌルは相対する二素子が作るアレイパターンである。

4. まとめ

励振器の導波路の厚さ、スロットの形状、ピンの形状などを変更し広帯域化が実現できた。

今後の課題として、交差偏波分を抑えるように改善を図りたい。

本研究は学士4年の佐藤長紀君、野口武士君の協力を得た。

参考文献

[1]幡野貴彦 小塩立吉 石上治 後藤尚久 “薄型構造の円形導波管TE₀₁モード励振器” 2003 信学総大B-1-91

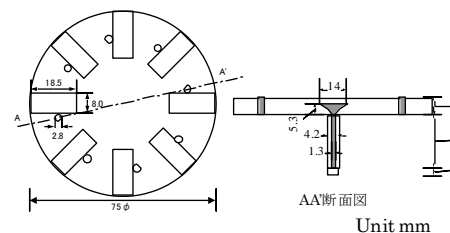


図1 TE₀₁モード励振器

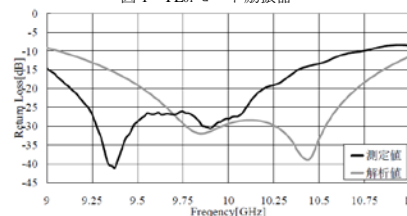


図2 TE₀₁モード励振器のリターンロス

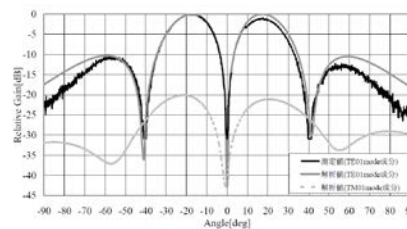


図3 TE₀₁モード励振器の放射パターン

これ以後は RLSA 以外の雑談

40年ほど前のAP研のパネルディスカッション

私の担当題目は “**変位電流とはなにか**” で、次はその説明の要旨

静電容量 C のコンデンサに交流電圧 V をかけたとき流れる電流は次のようになる

$$I = j\omega CV = j\omega \frac{\varepsilon S}{d} V = j\omega \varepsilon ES = j\omega DS \quad \because E = V/d, \varepsilon E = D$$

ここで E はコンデンサの導体板間にできる電界、 D は電束密度である

この I が変位電流であり、マクスウェルの方程式には変位電流密度として $j\omega D$ を用い、アンペアの周回積分の法則に従って磁界を作ります。

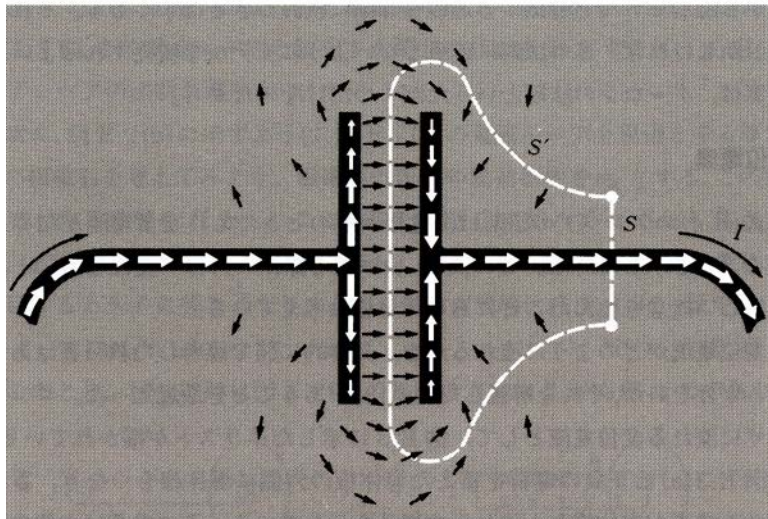
三菱電機の喜連川さん (AP研専門委員長?、幹事はKDDの横井さん?) は以上の私の説明に納得せず、コンデンサの導体板の間を電流はどのように流れるのか説明せよ、と、いって最後まで追及されました。

このような考え方でアンテナが設計できるから、いいではないですかと私は逃げたのです

次のスライドはこれまでの説明例です。

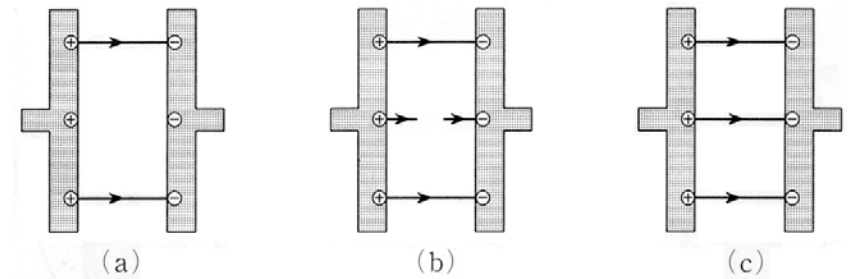
コンデンサに電流が流れる現象の説明例

後藤、なっとくする演習・電磁気学、講談社(図E.3、図E.4)、1998



図E.3 下記文献の416ページ

伝導電流(白い矢印)と変位電流(黒い矢印)
白い点線は変位電流が通過するところ

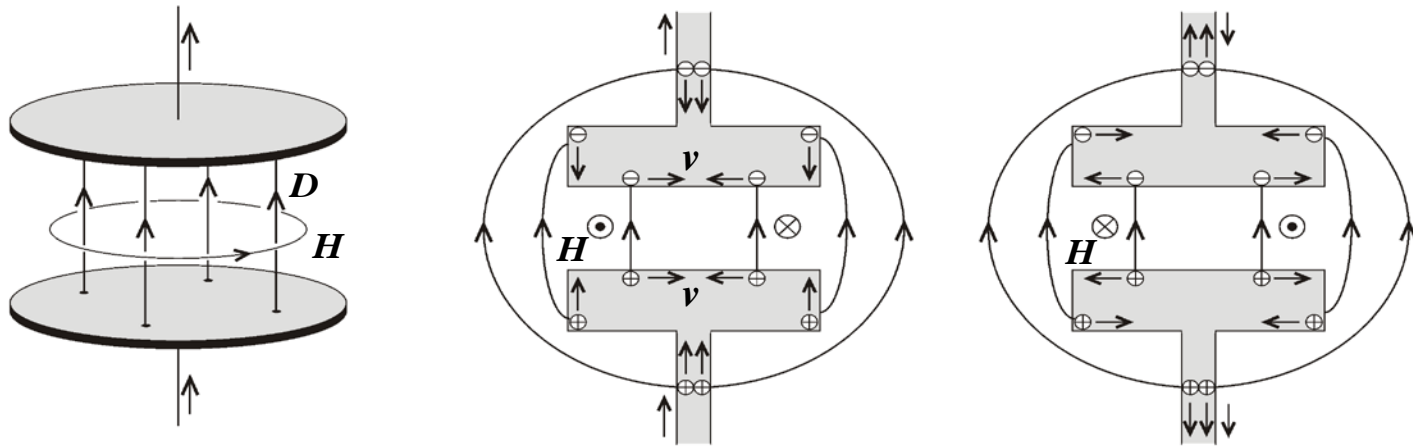


図E.4 導体板間の電気力線が(a)から(c)に増える様子
中間の(b)は電荷が導体板に現われた瞬間だが、
近接作用論では在りえない状態である

飯野修一訳、バークレー物理コース 電磁気 下、丸善(1996)

コンデンサが作る電束密度 D とそれが作る磁界 H ($\otimes \odot$)

(下記文献の図6.10 : 喜連川さんも納得するはず)



電荷と**磁荷**の相互作用から

$$H = v \times D$$

$$E = -v \times B$$

積分すると

$$\int_s H_s ds = \partial \Phi_e / \partial t + I \quad \text{アンペアの法則}$$

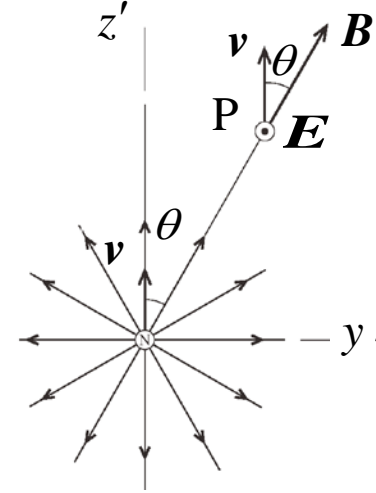
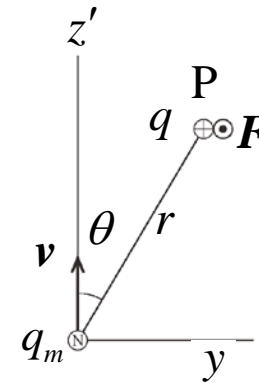
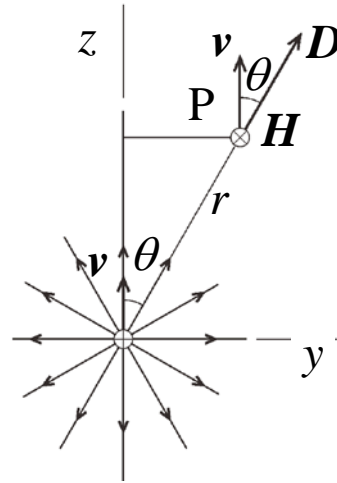
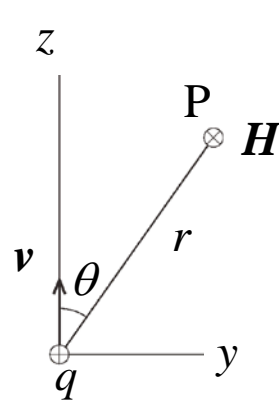
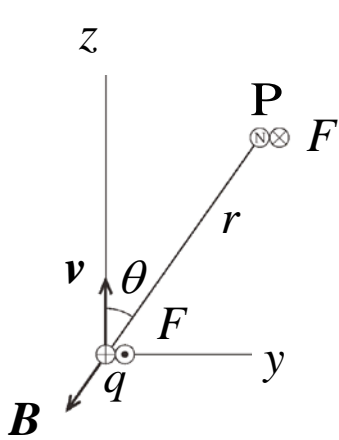
$$\int_s E_s ds = -\partial \Phi / \partial t \quad \text{ファラデーの法則}$$

(下記文献の式(5.36)、式(5.58))

(下記文献の式(5.55)、式(5.59))

後藤尚久、電磁気学、電子情報通信学会編、コロナ社 (図6.10)

電荷と磁荷の相互作用から $H = v \times D$, $E = -v \times B$ の導出



(1) ローレンツ力

(2) ビオ-サバールの法則

(3) $H = v \times D$

(4) (1)を移動しながら観測

(5) $E = B \times v$

1. ローレンツ力

図(1)ではP点にある磁荷 q_m が原点に磁束密度 B を作っている。原点にある電荷 q が速度 v で移動すると電荷 q には次のローレンツ力 F が働く。

$$F = qBv \sin \theta \quad \because \sin(\pi - \theta) \quad \therefore F = qv \times B \quad (1)$$

2. ビオ-サバールの法則

図(1)のP点の磁荷 q_m には原点の電荷 q とは反対方向の偶力 F が働く。P点の磁荷 q_m に力 F が働くことは、P点に次の磁界 H ができていていることを意味する。

$$H = F / q_m = qBv \sin \theta / q_m \quad (2)$$

これに図(1)の磁荷 q_m が作る磁束密度 $B = q_m / 4\pi r^2$ を代入すると、次に示すビオ-サバールの法則と第3式

が得られる。第3式の磁界 H は、図(3)に示すようにP点の電束線 D が速度 v で移動するために生じるのである。

$$H = \frac{q}{4\pi r^2} v \sin \theta = D v \sin \theta \quad \therefore H = v \times D \quad (3)$$

3. 図(1)を移動しながら観測

速度 v で z 軸の正方向に移動しながら図(1)を観測し、磁荷 q_m を原点に、静止した電荷 q をP点に置いたのが図(4)、である。電荷 q には式(1)の力 F が働くから、P点には次の電界ができていていることを意味する。

$$F = qBv \sin \theta = qE \quad \therefore E = -v \times B \quad (4)$$

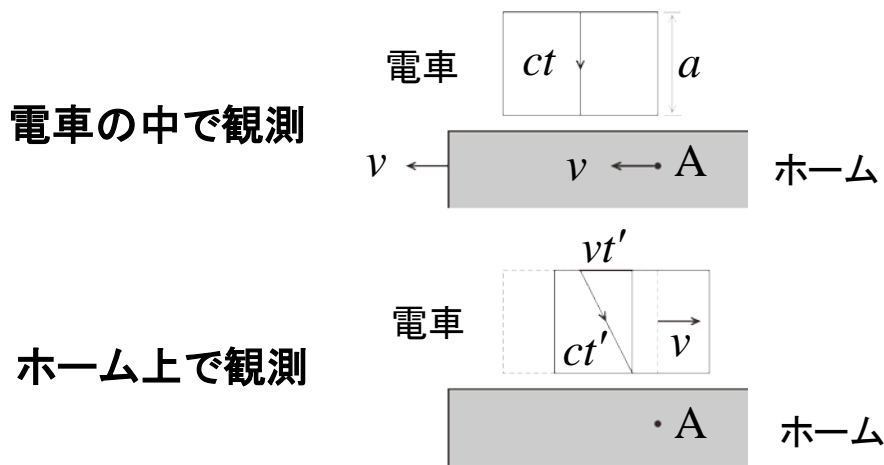
図(5)に示すように、電界 E と磁束密度 B の関係は図(3)の磁界 H と電束密度 D の関係に同じである。

電磁気学の基本量(電界 E と磁束密度 B)を決めるのは次の三つ

クーロンの法則、電荷保存の法則、ローレンツ収縮

ローレンツ収縮の導出 : 速度 v で進む電車の中で左側の窓から右側の窓までの光の伝搬実験

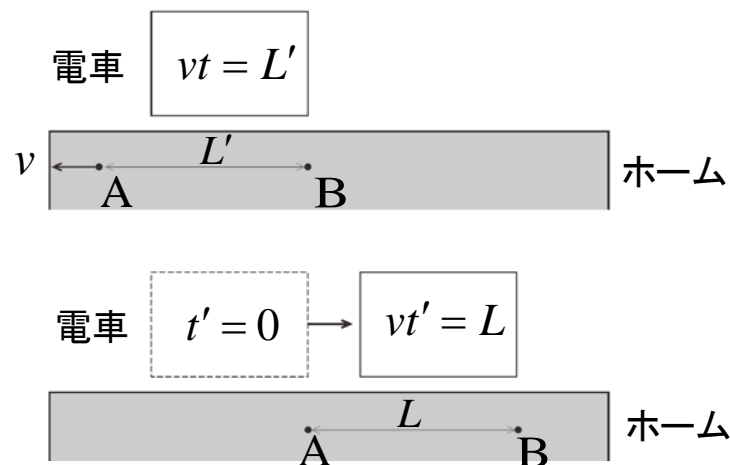
下図はスライド32の文献の図A.7 (光速 c は発光体の速度によらず一定を利用)



図(1) 光の伝搬実験

図(1)上は、速度 v で走る横幅 a の電車の先端がホーム上のA点を通る瞬間であり、同時に左側の窓から右側に向かって光を放射した。その光がその光が右側の窓に到達する時間を t とすると $ct = a$ が成り立つ。

この実験をホーム上で観測したのを図(1)下に示した。光が電車内を通過する距離は横幅 a より長くなるが光速 c は一定である。このため伝播時間は t より大ききいとしなければならなく、電車の進む距離も図(1)下のようになり、次の式が成り立つ。



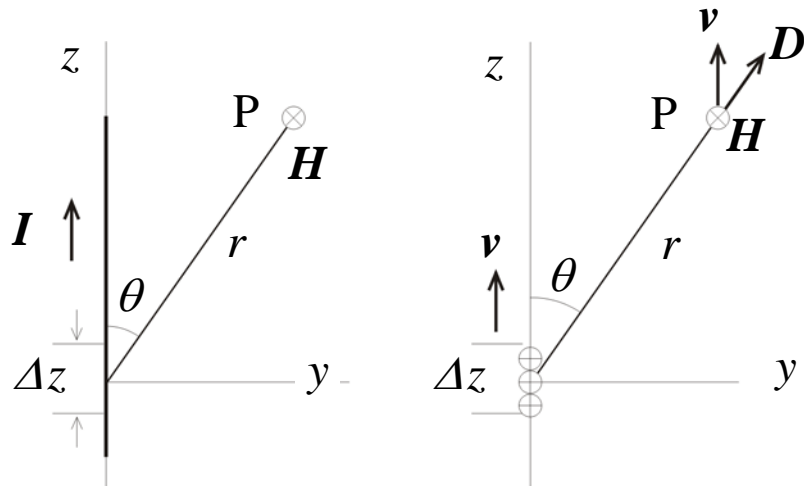
図(2) 電車の移動距離の観測

$(ct')^2 = (vt')^2 + (ct)^2 \quad \therefore t' = t / \sqrt{1 - (v/c)^2}$
 図(2)は電車の先端がA点から距離 L だけ離れたB点まで進むときの観測結果である。図から明らかのように次の式が成り立つ。

$$L'/L = t/t' \quad \therefore L' = \sqrt{1 - (v/c)^2} L$$

このように、物体が速度 v で移動すると移動する方向に圧縮されることをローレンツ収縮という。

$H = \mathbf{v} \times \mathbf{D}$, $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ の導出



(a) ビオ-サバールの法則

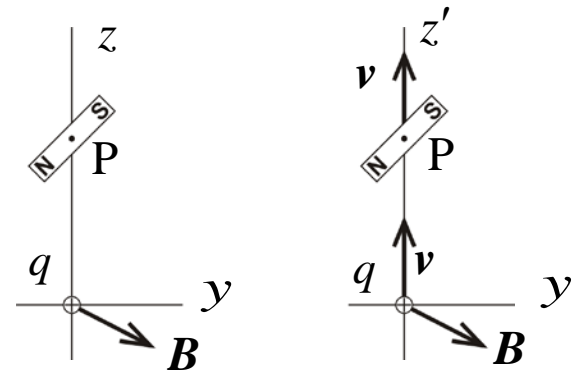
(b) 電荷の移動

図(a)に示す微小長の電流 $I\Delta z$ が距離 r のP点に次の磁界 H を作るのがビオ-サバールの法則である

$$H = \frac{I\Delta z \sin \theta}{4\pi r^2}, \quad I\Delta z = \sigma v \Delta z = qv \quad (1)$$

第2式の電流 I は図(b)のように電荷密度 σ と通過速度 v の積であり、電荷密度と微小長の積は点電荷 q というのが第3式である。この結果、磁界 H は図(b)からベクトルで表して次のようになる

$$H = \frac{qv \sin \theta}{4\pi r^2} = D v \sin \theta \quad \therefore H = \mathbf{v} \times \mathbf{D} \quad (2)$$



(c) 電荷と磁石

(d) 左を移動しながら観測

図(c) は z 軸の原点に電荷 q があり、その上のP点に棒磁石がある。電荷の位置に磁石は磁束密度 B を作るが、当然ながら電荷 q に力は働かない。

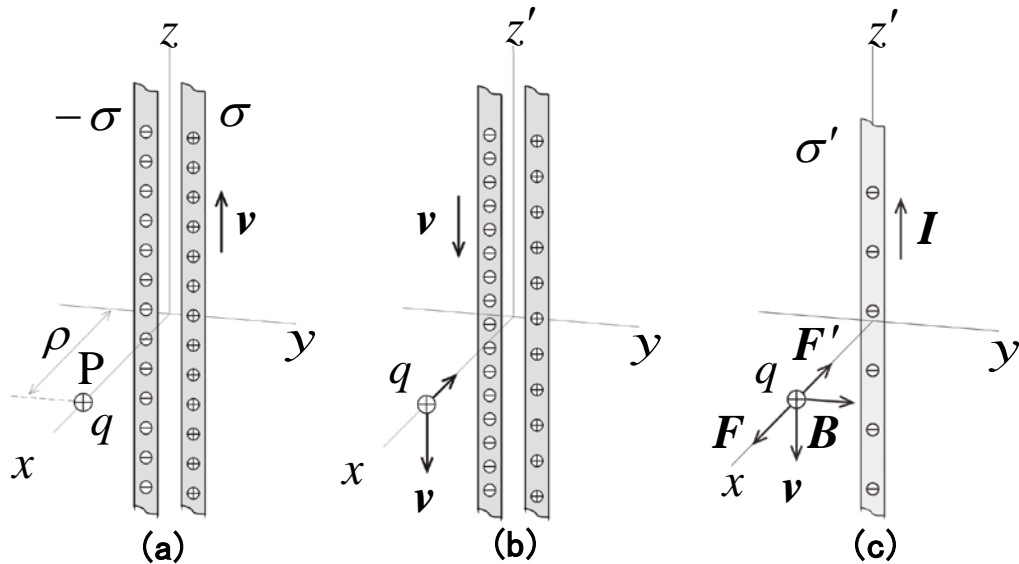
この図(c) を速度 v で下方向に移動しながら観測したのが図(d)である。電荷と磁石は共に速度 v で上方向に移動している。電荷 q には、式(1)から分かるように次のローレンツ力 F が働く

$$\mathbf{F} = I\Delta z \times \mathbf{B} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -q\mathbf{E} \quad (3)$$

第4式の左辺は電荷 q が移動したため働く力だが、電荷と磁石の位置は変わらないから、電荷 q に反対方向の力が働く。これが第4式の右辺で、これより次の式を得る

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (4)$$

ローレンツ力の導出



図(a) 正負の電荷をもつ誘電体棒

図(b) 図(a)を速度 v で上方向に移動しながら観測

図(c) 誘電体棒を1本としたときの電荷と電荷 q に働く力

図(a)に正負の密度 σ の電荷を同量もつ細い誘電体棒を座標系とともに示した。ただし正の電荷をもつ棒は速度 v で z 軸の正方向に移動し、 x 軸上の ρ の位置P点に電荷 q がある。当然ながら電荷 q に力は働かない。

これを正の電荷をもつ誘電体棒と共に移動して観測したのが図(b)である。ローレンツ収縮とは速度 v で移動するものが静止すると長さは k 倍になり、静止するものが速度 v で移動すると $1/k$ 倍になる性質である。図(b)の正負の電荷の和は次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma' &= \sigma k - \sigma / k = -v^2 \sigma / kc^2 = -\mu \epsilon v I \\ \therefore k &= \sqrt{1 - (v/c)^2}, \quad 1/c^2 = \mu \epsilon, \quad I = -v \sigma / k \end{aligned} \quad (1)$$

図(a)では電荷 q に力は働かないが、図(b)では働く。図(c)のように線電荷密度 σ' と電荷 q に次の力が働く、

$$F' = qE, \quad E = \frac{\sigma'}{2\pi\epsilon\rho} = -v \frac{\mu I}{2\pi\rho} = -vB \quad (2)$$

図(c)の電流 I は図(b)左側の負の電荷が移動することによる電流である。式(1)下段の第3式で表される上方向の電流で図(c)の磁束密度 B を作る。式(2)を図(c)に示すベクトルで表し、全体で電荷 q に力が働かないとして、次の式が得られる

$$F' = qE = qB \times v \quad (3)$$

$$F = -F' = qv \times B \quad \therefore E = -v \times B$$

下段第2式の右辺がローレンツ力である

General Expressions for Vector and Scalar Potentials

Kaneyuki Kurokawa, *Life Fellow, IEEE*

Abstract—This paper derives general expressions for the vector and scalar potentials in a bounded region. The necessary conditions for a vector function to be, respectively, the curl of another vector function and the gradient of a scalar function are first presented. Then with the help of Helmholtz's Theorem, general expressions for the vector and scalar potentials are derived. The results are summarized in two theorems. Three corollaries are presented. The first one indicates that a vector function in a simply bounded space is the curl of another vector function, if and only if, its divergence is equal to zero. The second one indicates that a vector function in a simply connected space is the gradient of a scalar function, if and only if, its curl is equal to zero. The last one indicates that the magnetic induction is the curl of a vector potential. The classical textbook by Jeans presents the same conclusion about the magnetic induction using an erroneous discussion. The point where the discussion breaks down is indicated. Applications to Antenna Theory as well as four simple examples are shown to facilitate the understandings of the present discussion.

Index Terms—Antenna theory, potential, scalar potential, vector potential.

I. INTRODUCTION

ANTENNA theory uses vector and scalar potentials. Using the potentials gives us a simplified method of analyzing field configurations. Textbooks on electromagnetism give the foundations. Many textbooks [1]–[7] with some exceptions [8],

II. DISCONTINUOUS VECTOR FUNCTIONS

The magnetic induction \mathbf{B} and the electric field \mathbf{E} are in general discontinuous at the interface of two media. In order to include \mathbf{B} and \mathbf{E} in our discussion, we assume as follows.

The region of our interest is a connected space V with the boundary S . S may consist of a finite number of piecewise smooth surfaces $S = \sum S_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$). The area of S_i is each finite except for the outermost boundary S_0 whose area becomes infinite when V extends to infinity. The magnitude of our vector function \mathbf{F} of position \mathbf{r} does not become infinite in V , in other words, \mathbf{F} is bounded in V . \mathbf{F} may become discontinuous across a piecewise smooth surface or surfaces D with a finite total area, but \mathbf{F} is continuous throughout $V - D$ up to the boundary S .

If $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$ in $V - D$ and the tangential component of \mathbf{A} is continuous across D , then we write as $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$ in V . If the tangential component of \mathbf{A} is discontinuous across D , then $\nabla \times \mathbf{A}$ becomes infinite and $\nabla \times \mathbf{A}$ cannot be equal to our bounded vector function \mathbf{F} . If $\mathbf{F} = -\nabla\varphi$ in $V - D$ and φ is continuous across D , then we write as $\mathbf{F} = -\nabla\varphi$ in V . Similarly, if $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ in $V - D$ and the normal component of \mathbf{F} is continuous across D , we write as $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ in V . If $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ in $V - D$ and the tangential component of \mathbf{F} is continuous across D , we write as $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ in V . These conventions will facilitate

ベクトルポテンシャル A について

磁束密度 B が不連続の場合、多くの教科書は誤った方法で $B = \nabla \times A$ を導出している

現実には磁束密度 B は常に連続だから先生は数学として問題にしている
たとえば、「関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続なことを照明せよ」という問題がある
次は解答例である

1. 高校の数学では、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ となるとき
2. 大学の数学では、任意の正の数 ε を選ぶと、 ε によって δ が決まり

$$|x - a| < \delta \text{ とすると } |f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ が成り立つとき}$$

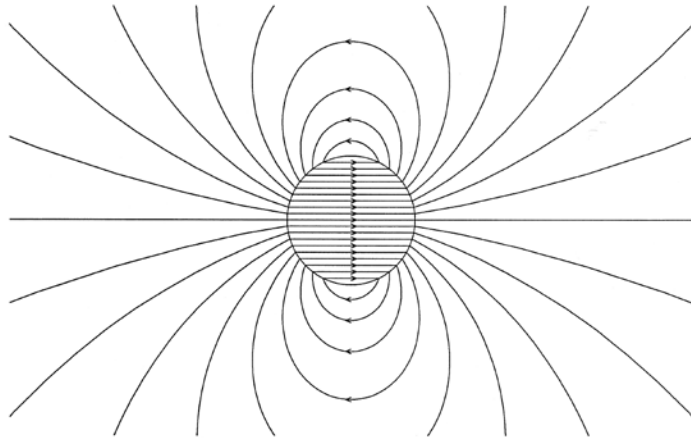
下記文献(学会誌で紹介)の46ページ

マックスウェルの方程式の $\nabla \cdot B = 0$ より $\nabla \cdot H = 0$ (磁力線は連続)となるため
ベクトルの公式 $\nabla \cdot \nabla \times A = 0$ と比較して、磁界 H は次のように表される

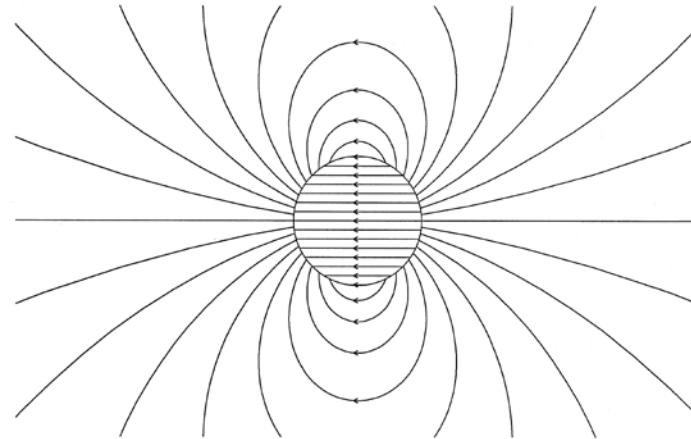
$$H = \nabla \times A \quad (4.1)$$

球磁石が作る磁束線(左)と磁力線(右)

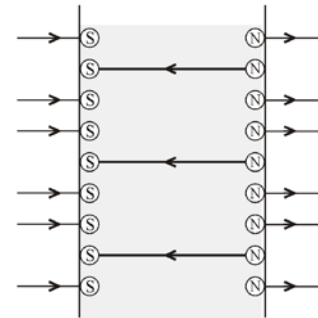
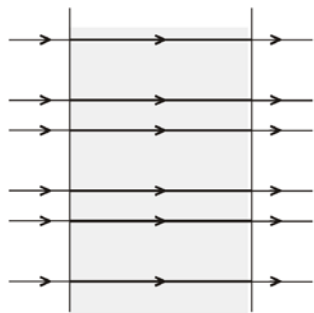
(下記文献の図3.14)



磁束線



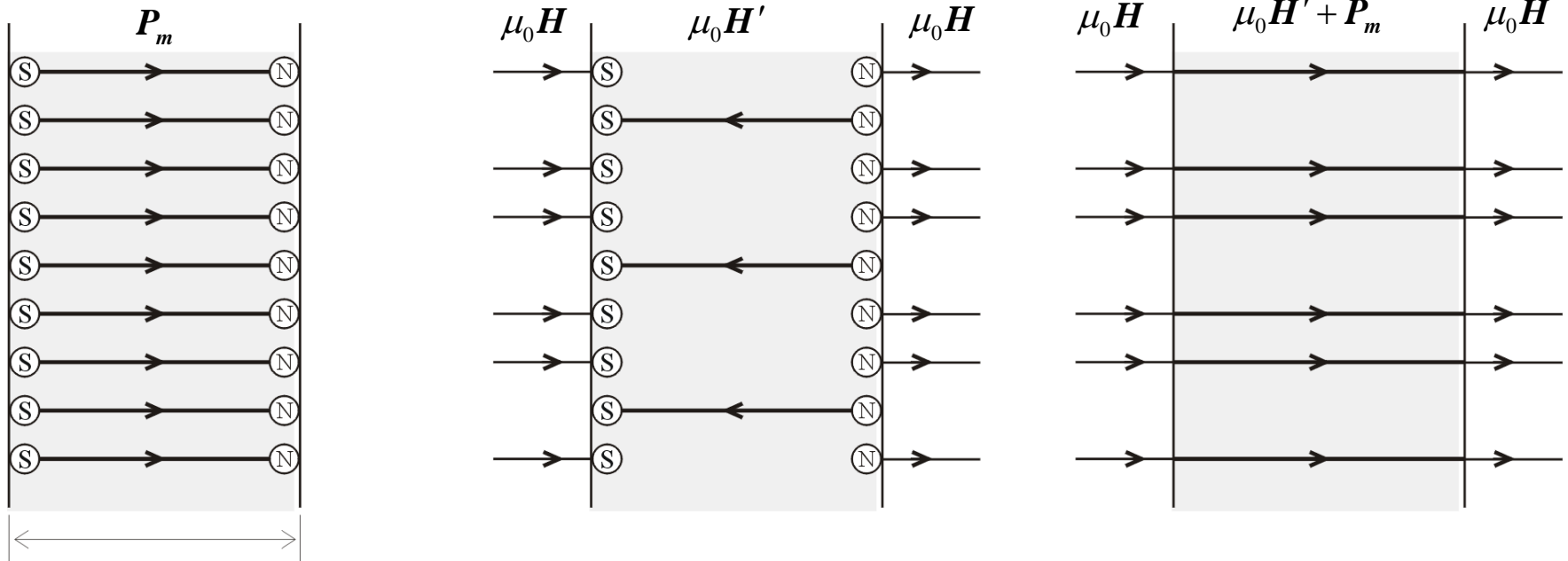
磁力線



球磁石の中心部の拡大図

磁束密度 B 、磁界 H 、磁化 P_m の関係（球磁石の中心部）

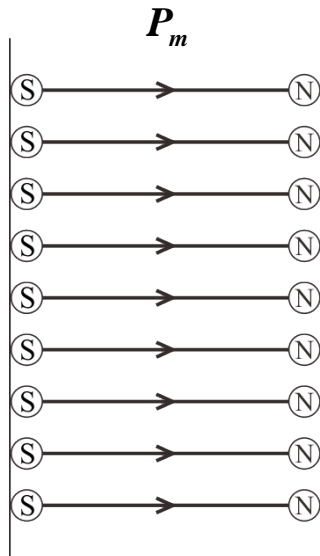
$$B = \mu_0 H + P_m$$



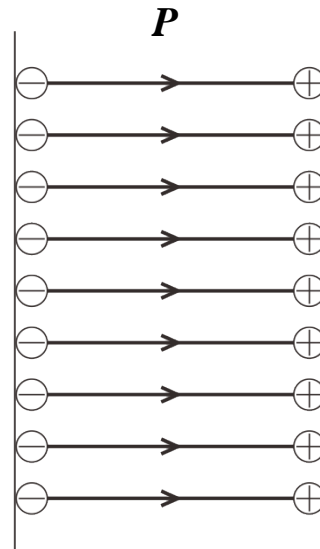
磁化 P_m とは $\textcircled{s} \textcircled{n}$ の “磁荷の対” が連続しているもの、 H' は磁性体内部の磁界

なぜ“電石”は存在しないか

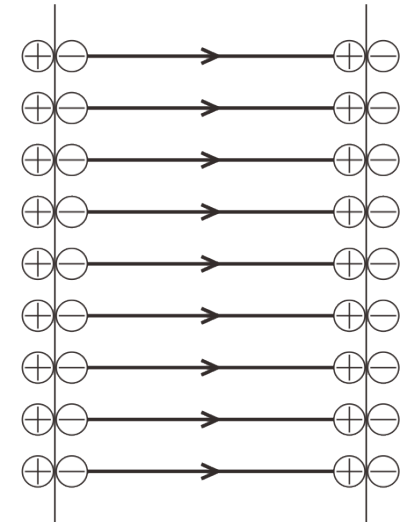
磁性体に対応する誘電体： $D = \epsilon_0 E + P$



(a) 磁性体(磁石)



(b) 分極 P をもつ誘電体



(c)

1. 分極 P とは正負の電荷の対だが、対の方向はランダムで(b)の状態にはならない
2. かりに、(b)が可能としても正負の電荷は独立に存在するため(c)の状態に落ち着く
3. (c)では電束線は誘電体内部だけ存在し、“電石”の性質はもたない
4. 磁荷の本質はループ電流のため必ず正負の対で出現し、磁束線は連続するのである