

リンク重みの誤差に対する中心性指標のロバスト性解析

津川 翔[†] 大崎 博之^{††}

[†] 筑波大学 システム情報系

〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1

^{††} 関西学院大学 理工学部

〒 669-1337 兵庫県三田市学園 2-1

E-mail: [†]s-tugawa@cs.tsukuba.ac.jp, ^{††}ohsaki@kwansei.ac.jp

あらまし 本稿では、中心性指標に基づくノードランキングのリンク重みに含まれるノイズに対する耐性を解析する。あるグラフとそのグラフのリンク重みにノイズが含まれたグラフにおいて、中心性指標の降順にノードをそれぞれランキングした時に、それらのランキングがどの程度一致するかを解析する。具体的には、ノイズの含まれていないグラフにおいて中心性指標に基づくランキング 1 位のノードが、リンク重みにノイズが含まれたグラフにおいてランキングの上位 m 位以内に存在する確率 Top_m および、リンク重みにノイズが含まれていないグラフにおいて中心性指標に基づくランキングが上位 m 位以内のノードのうち、リンク重みにノイズが含まれたグラフにおいても上位 m 位以内に存在するノードの割合 Overlap_m の期待値を導出する。これまでの研究では、シミュレーションや実データを用いた分析によって、実験的に Top_m や Overlap_m を求めていたが、本稿の解析によって、任意のグラフにおいてこれらの理論値を求めることを可能にする。さらに数値例によって、ランダムグラフにおいては、中心性指標に基づくノードランキングのリンク重みのノイズに対する耐性が、グラフの規模や密度によってほとんど異ならないことなどを示す。
キーワード ネットワーク分析、リンク重みのノイズ、中心性指標、ノードランキング

Analysis on the Robustness of Centrality Measures against Link Weight Noises

Sho TSUGAWA[†] and Hiroyuki OHSAKI^{††}

[†] Faculty of Engineering, Information and Systems, University of Tsukuba

1-1-1 Tennohdai, Tsukuba, Ibaraki 305-8573, Japan

^{††} School of Science and Technology, Kwansei Gakuin University

2-1 Gakuen, Sanda, Hyogo 669-1337, Japan

E-mail: [†]s-tugawa@cs.tsukuba.ac.jp, ^{††}ohsaki@kwansei.ac.jp

Abstract In this paper, we mathematically analyze the robustness of node ranking based on centrality measure against link weight noises. We analyze the node ranking consistency based on centrality measures between a graph and a graph with link weight noises. We derive Top_m and Overlap_m , which are both utilized to quantify the robustness of centrality measure in a network. In the existing researches, Top_m and Overlap_m are obtained experimentally through simulations and experiments. Our mathematical analysis enables us to obtain theoretical values of these metrics. Our numerical examples show that graph size and density do not significantly affect the robustness of the node ranking in random graphs.

Key words Network Analysis, Link Weight Noise, Centrality Measure, Node Ranking

1 はじめに

人と人との交流関係やタンパク質間の相互作用の関係、脳機能間の関係などを表現した大規模で複雑なネットワークを分析するネットワーク分析が活発に行われている [1-4]。ネット

ワーク分析では、現実の様々なエンティティ間の関係を重みつきグラフとして表現し、分析する。例えば、人のネットワークの分析 (ソーシャルネットワーク分析) では、人をノード、人と人との紐帯の強度をリンク重みとする重みつきグラフを分析する [3]。脳機能ネットワークの分析では、脳の領域をノード、領

域間の活動の相関の強さをリンク重みとする重み付きグラフを分析する [1]。

ネットワーク分析ではさまざまな指標が提案されているが、特に、グラフにおけるノードの中心性を測る指標 (次数中心性・媒介中心性・近接中心性・固有ベクトル中心性) [5, 6] が実際のネットワーク分析において広く用いられている [7–9]。中心性指標は、あるノードが他のノードに与える影響度を推定する指標である。中心性指標を用いることで、コミュニティにおける中心人物の特定 [7, 8] や、重要な機能を持つ脳の領域の推定 [9] などの分析が行われている。

ただし、ノード間の関係の有無や強度を正確に取得することは容易ではないため、ネットワーク分析に用いられるグラフには、通常、さまざまな誤りが含まれている [10–14]。例えば、従来のソーシャルネットワーク分析の多くでは、実験参加者へのアンケート調査から、人と人との紐帯の強さを取得しているため、人の主観によって分析に用いられるグラフのリンク重みにノイズが含まれてしまう [15]。脳機能ネットワークの分析においては、MRI (Magnetic Resonance Imaging) によって取得した BOLD (Blood Oxygen Level Dependent) シグナル強度の相関によって脳領域間の関係の強度を推定しているため、推定誤差や計測誤差によってグラフのリンク重みにノイズが含まれてしまう。

これまで、ネットワーク分析で用いられる中心性指標が、グラフの不完全性に対してどの程度の耐性を持つかの分析が行われている [10–14, 16–18]。文献 [10, 12] では、シミュレーション実験により、中心性指標が、ノードやリンクのランダムな追加・削除に対して、どの程度の耐性を持つかが分析されている。我々も、特にリンク重みに含まれる誤差に着目し、人工的に生成したグラフや現実のソーシャルネットワークにおけるノードの中心性指標の耐性を実験的に調査している [17, 18]。

我々の研究も含めこれまでの研究では、シミュレーションによって実験的に、ネットワークにおける誤差が中心性指標に与える影響を調査している。ネットワークにおける誤差がノードの中心性指標に与える影響を解析的に調査した研究としては、Ghoshal らの研究 [16] が存在する。Ghoshal ら [16] は、ページランクに基づくノードランキングが、次数分布を保ったリンクのランダムな張り替えによって変動しない条件を導出している。つまり、Ghoshal らは、ノードランキングの変動の有無に着目している。ネットワークにおける誤差が中心性指標に与える影響を理解するためには、ノードランキングの変動の有無に着目するだけでなく、変動の大きさを求めることも重要であると考えられる。

本稿では、これまでの実験的なアプローチではなく、数学的解析によって、中心性指標に基づくノードランキングのリンク重みのノイズに対する耐性を明らかにする。中心性指標として次数中心性を対象とし、既存研究 [10, 12, 17] で用いられている Top_m および Overlap_m と呼ばれるノードランキングのロバスト性を評価する指標の期待値を導出する。本稿における解析によって、任意のグラフにおいて、リンク重みのノイズによる中心性指標に基づくノードランキングの変動の大きさを求めるこ

とを可能にする。さらに本稿では数値例を示し、本稿の解析を用いて、さまざまなグラフにおける中心性指標に基づくノードランキングのロバスト性を分析することが可能であることを示す。

本稿の構成は以下の通りである。2 章では数学的解析によって、リンク重みのノイズによる中心性指標に基づくノードランキングの変動の大きさを導出する。3 章では、数値例とシミュレーションの比較によって解析の妥当性を検証するとともに、リンク重みのノイズが中心性指標に与える影響を議論する。最後に 4 章において、本稿のまとめと今後の課題を述べる。

2 解 析

本稿では、重みつき無向グラフ G とグラフ G の各リンク重みに平均 μ 、分散 σ^2 を母数に持つ分布に従うノイズを加えたグラフ $G_{\mu, \sigma}$ の間で次数中心性に基づくノードのランキングがどの程度変動するかを解析する。グラフ G とグラフ $G_{\mu, \sigma}$ において、次数中心性の降順にノードをそれぞれランキングし、それらのランキングがどの程度一致するかを解析する。具体的には、グラフ G において中心性指標に基づくランキングが最上位のノードが、グラフ $G_{\mu, \sigma}$ においてランキングの上位 m 位以内に存在する確率 Top_m [10, 12, 17] および、グラフ G において中心性指標に基づくランキングが上位 m 位以内のノードのうち、グラフ $G_{\mu, \sigma}$ において上位 m 位以内に存在するノードの割合 Overlap_m [10, 12, 17] の期待値を導出する。なお、重みつきグラフにおけるノード v の次数中心性は、ノード v に接続されているリンクのリンク重みの総和で定義される [19]。本稿で用いる記号の定義を表 1 に示す。

まず、グラフ G において中心性指標に基づくランキングが最上位のノードが、グラフ $G_{\mu, \sigma}$ においてもランキングの最上位に位置する確率 Top_1 を導出する。

次数 k のノードに接続されている k 本のリンクに加えられるノイズの総和 x の確率密度関数 $f(k, x)$ は、中心極限定理より、次式で近似できる。

$$f(k, x) = \frac{e^{-\frac{(x-k\mu)^2}{2k\sigma^2}}}{\sqrt{2k\pi\sigma^2}} \quad (1)$$

また、累積分布関数 $F(k, x)$ は、次式で求められる。

$$\begin{aligned} F(k, x) &= \int_{-\infty}^x f(k, t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \text{erf} \left(\frac{x - k\mu}{\sqrt{2k\sigma^2}} \right) \right) \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 erf は誤差関数である。

グラフ G において次数中心性の値が i 番目に大きいノード v_i に接続されているリンクに加えられるノイズの総和を x_i とすると、求める Top_1 は、ノード v_i ($n \geq i \geq 2$) について、 $c_1 + x_1 \geq c_i + x_i$ となる確率、つまり、 $x_i \leq c_1 - c_i + x_1$ となる確率である。したがって、 $y_i = c_1 - c_i + x$ と置くと、 Top_1 は次式で求められる。

表 1 解析で用いる記号の定義

G	リンク重みにノイズの加えられていない重みつき無向グラフ
$G_{\mu,\sigma}$	グラフ G の各リンク重みに平均 μ 、標準偏差 σ を母数に持つ分布に従ってノイズを加えた重みつき無向グラフ
n	グラフ G のノード数
c_i	グラフ G において度数中心性の値が i 番目に大きいノードの度数中心性
k_i	グラフ G において度数中心性の値が i 番目に大きいノードの度数
v_i	グラフ G において度数中心性の値が i 番目に大きいノード

$$\text{Top}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(k_1, x) \prod_{i=2}^n F(k_i, y_i) dx \quad (3)$$

次に、式 (3) を一般化し、 Top_m を導出する。

ノード v_1 がグラフ $G_{\mu,\sigma}$ において、中心性に基づくランキングの上位 m 位以内に位置するのは、 $\{v_i | n \geq i \geq 2\}$ について、 $c_1 + x_1 \geq c_i + x_i$ となる、あるいは $\{v_i | n \geq i \geq 2 \wedge i \notin \{i_2\}\}$ について $c_1 + x_1 \geq c_i + x_i$ となり、かつ $\{v_j | j \in \{i_2\}\}$ について $c_1 + x_1 < c_j + x_j$ となる、あるいは $\{v_i | n \geq i \geq 2 \wedge i \notin \{i_2, i_3\}\}$ について $c_1 + x_1 \geq c_i + x_i$ となりかつ $\{v_j | j \in \{i_2, i_3\}\}$ について $c_1 + x_1 < c_j + x_j$ となる、...、あるいは $\{v_i | n \geq i \geq 2 \wedge i \notin \{i_2, i_3, \dots, i_m\}\}$ について $c_1 + x_1 \geq c_i + x_i$ となりかつ $\{v_j | j \in \{i_2, i_3, \dots, i_m\}\}$ について $c_1 + x_1 < c_j + x_j$ となる、場合のいずれかである。これらの事象は独立であるため、これらの事象の確率の和が求める Top_m である。ここで、 $H(k, x) = 1 - F(k, x)$ 、

$$I(k_i, x_i, U) = \begin{cases} 1 & i \in U \\ F(k_i, x_i) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

と置く。式 (4) における U はノード番号を表す添字の集合である。すると、 Top_m は次式で求められる。

$$\begin{aligned} \text{Top}_m = & \int_{-\infty}^{\infty} f(k_1, x) \left\{ \prod_{i=2}^n F(k_i, y_i) \right. \\ & + \sum_{i_2=2}^n H(k_{i_2}, y_{i_2}) \prod_{i=2}^n I(k_i, y_i, \{i_2\}) \\ & + \sum_{i_3=2}^n H(k_{i_3}, y_{i_3}) \sum_{i_2=2}^n H(k_{i_2}, y_{i_2}) \\ & \times \prod_{i=2}^n I(k_i, y_i, \{i_2, i_3\}) \\ & + \dots \\ & + \sum_{i_m=2}^n H(k_{i_m}, y_{i_m}) \dots \sum_{i_2=2}^n H(k_{i_2}, y_{i_2}) \\ & \times \prod_{i=2}^n I(k_i, y_i, \{i_2, i_3, \dots, i_m\}) \left. \right\} dx \end{aligned} \quad (5)$$

次に、グラフ G において中心性指標に基づくランキングが上位 m 位以内のノードのうち、グラフ $G_{\mu,\sigma}$ において上位 m 位以内に存在するノードの割合 Overlap_m を求める。 Overlap_m は、ノード v_1 がグラフ $G_{\mu,\sigma}$ において中心性指標に基づくラ

ンキングの上位 m 位以内に存在する確率、ノード v_2 がグラフ $G_{\mu,\sigma}$ において中心性指標に基づくランキングの上位 m 位以内に存在する確率、...、ノード v_m がグラフ $G_{\mu,\sigma}$ において中心性指標に基づくランキングの上位 m 位以内に存在する確率の平均である。したがって、グラフ G において度数中心性に基づくランキングが第 r 位のノードが、グラフ $G_{\mu,\sigma}$ において、度数中心性に基づくランキングの上位 m 位以内に位置する確率を $\text{Top}_{r,m}$ とおくと、 Overlap_m は、次式で求められる。

$$\text{Overlap}_m = \frac{\text{Top}_{1,m} + \text{Top}_{2,m} + \dots + \text{Top}_{m,m}}{m} \quad (6)$$

ここで $\text{Top}_{r,m}$ は、式 (5) における、 c_1 および k_1 を、 c_r および k_r に置き換え、 $z_i = c_r - c_i + x$ と置くことにより、次式で求められる。

$$\begin{aligned} \text{Top}_{r,m} = & \int_{-\infty}^{\infty} f(k_r, x) \left\{ \prod_{i=1}^n I(k_i, z_i, \{r\}) \right. \\ & + \sum_{i_2=1}^n H(k_{i_2}, z_{i_2}) \prod_{i=1}^n I(k_i, z_i, \{i_2, r\}) \\ & + \sum_{i_3=1}^n H(k_{i_3}, z_{i_3}) \sum_{i_2=1}^n H(k_{i_2}, z_{i_2}) \\ & \times \prod_{i=1}^n I(k_i, z_i, \{i_2, i_3, r\}) \\ & + \dots \\ & + \sum_{i_m=1}^n H(k_{i_m}, z_{i_m}) \dots \sum_{i_2=1}^n H(k_{i_2}, z_{i_2}) \\ & \times \prod_{i=1}^n I(k_i, z_i, \{i_2, i_3, \dots, i_m, r\}) \left. \right\} dx \end{aligned} \quad (7)$$

3 数 値 例

本章では、2 章の解析結果を用いることにより、度数中心性に基づくノードランキングがリンク重みのノイズによってどの程度変動するかを、様々なグラフにおいて調査する。同時に、シミュレーション結果も示し、解析の妥当性を検証する。

まず、リンク重みに加えるノイズの量と、本稿で導出した Top_m および Overlap_m の関係を調査する。ER (Erdős-Rényi) モデルを用いて生成したノード数 100、密度 0.1 のランダムグラフの各リンクに $[0,1]$ の一様乱数に従うリンク重みを割り当てることにより、グラフ G を得る。グラフ G のリンク重みに平均 0 標準偏差 σ に従うガウスノイズを加えることにより、グラフ $G_{\mu,\sigma}$ を得る。グラフ G と $G_{\mu,\sigma}$ の組を 100 組生成し、 Top_1 、

表 2 数値例で用いるパラメータ設定

ノード数 n	100
密度 ρ	0.1
生成モデル	ER モデル
リンク重みの分布	[0, 1] の一様分布
ノイズの分布	平均 0、標準偏差 σ の正規分布

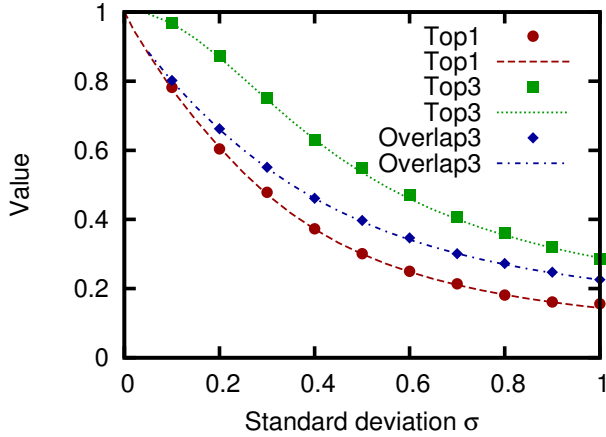


図 1: ノイズの標準偏差 σ と Top_1 、 Top_3 、および Overlap_3 の関係 (ネットワーク生成モデル:ER モデル、リンク重みの分布:一様分布、ノード数:100、密度:0.1)

Top_3 、および Overlap_3 の平均を求める。リンク重みに加えるノイズの標準偏差 σ を変化させることで、リンク重みに加えるノイズの量を変化させる。図 1 に、ノイズの標準偏差 σ と Top_1 、 Top_3 、および Overlap_3 の関係を示す。以降の図中の線は解析結果を、点はシミュレーション結果を示している。また特に断りのない限り、表 2 に示すパラメータ設定を用いている。

図 1 より、 Top_3 はノイズの標準偏差が 0.1 以下であれば、1 に近い値を取るのに対して、 Top_1 および Overlap_3 はノイズの標準偏差が 0.1 であっても 0.8 程度であることが分かる。 Top_1 は、グラフ G におけるランキング最上位のノードが、グラフ $G_{\mu,\sigma}$ においても最上位である確率であるため、当然ながら Top_3 よりも小さな値となる。 Overlap_3 は、最上位ノードだけに着目するのではなく、ある程度広い範囲のランキングの一致度を表す指標である。この結果から、ネットワーク分析の目的が、最も中心的な役割を果たしているノードをピンポイントで特定することである場合や、ある程度広い範囲のノードランキングを特定することである場合には、リンク重みのノイズによって分析結果にある程度の誤りが含まれてしまうと考えられる。

次にグラフの規模および密度によって、次数中心性に基づくノードランキングのノイズに対する耐性がどの程度異なるかを調査する。異なる規模のグラフにおけるノイズの標準偏差と Top_1 の関係を図 2 に、異なる密度のグラフにおけるノイズの標準偏差と Top_1 の関係を図 3 にそれぞれ示す。

図 2 より、グラフの規模によって Top_1 の値はそれほど大きく異なることが分かる。グラフの規模が大きいほど、 Top_1

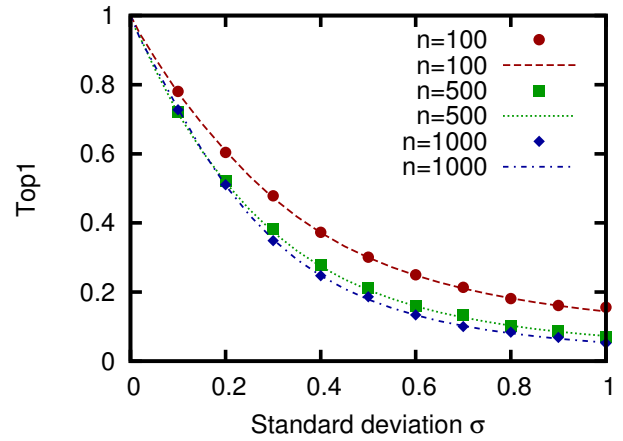


図 2: 異なる規模のグラフにおけるノイズの標準偏差 σ と Top_1 の関係 (ネットワーク生成モデル:ER モデル、リンク重みの分布:一様分布、密度:0.1)

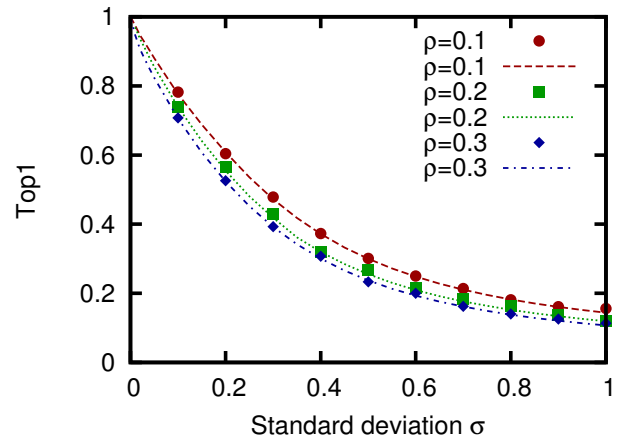


図 3: 異なる密度のグラフにおけるノイズの標準偏差 σ と Top_1 の関係 (ネットワーク生成モデル:ER モデル、リンク重みの分布:一様分布、ノード数:100)

が低い値を取っているが、これは規模が大きなグラフほど、特定のノードを推定するのが難しくなるためである。さらに、図 3 より、グラフの密度によっても、 Top_1 の値はそれほど大きく異なることが分かる。なお、密度が大きなグラフほど Top_1 の値が小さくなるのは、完全グラフに近いほど、ある特定のノードを推定するのが困難になるためである。

これらの結果より、ランダムグラフでは、グラフの規模や密度が異なっても、リンク重みのノイズに対する次数中心性に基づくノードランキングの耐性は、それほど異なると考えられる。なおこの結果は、我々がシミュレーション実験によってリンク重みの量子化に対する中心性指標の耐性を調査した結果とも矛盾しない。

次に、リンク重みの分布や構造の異なるグラフにおいて、次数中心性に基づくノードランキングのノイズに対する耐性がどの程度異なるかを調査する。まず、グラフの構造とリンク重み

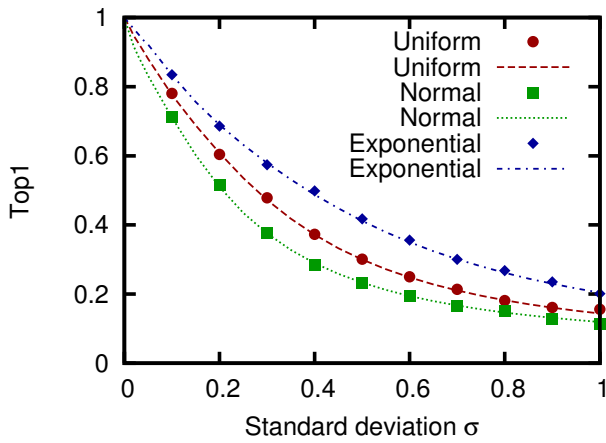


図 4: 異なるリンク重みの分布を持つグラフにおけるノイズの標準偏差 σ と Top_1 の関係 (ネットワーク生成モデル:ER モデル、ノード数:100、密度:0.1)

の平均は同じであるが、リンク重みの分布のみが異なるグラフにおいて、 Top_1 の値がどの程度異なるかを調査する。これまでと同様、ER モデルを用いてノード数 100、密度 0.1 のグラフを生成し、そのグラフの各リンクに対して異なる分布に従ってリンク重みを与えることによりグラフ G を得る。ここでは、平均 0.5 の $[0,1]$ の一様分布、平均 0.5、標準偏差 0.1 の正規分布、および平均 0.5 の指数分布に従うリンク重みを与えたグラフを生成して実験を行った。リンク重みの分布の異なるグラフにおけるノイズの標準偏差と Top_1 の関係を図 4 に示す。

図 4 より、リンク重みの分布が指数分布、一様分布、正規分布に従うグラフの順に、 Top_1 の値が高いことが分かる。これは、グラフにおいて次数中心性の高いノードと低いノードの差で説明することができる。リンク重みの分布が指数分布に従うグラフの場合、次数中心性が上位のノードと下位のノードの差が大きい。それに対して、正規分布に従うグラフでは多くのノードが同程度の次数中心性を持つ。これが、 Top_1 の値の差に表れていると考えられる。

次に、リンク重みの分布とグラフの構造がどちらも異なるグラフにおける次数中心性に基づくノードランキングのノイズに対する耐性を調査する。そのために、重みつきグラフの生成モデルである CE (Community Emergence) モデル [20]、WE (Weighted Evolution) モデル [21]、および WECS (Weighted Evolving with Community Structure) モデル [22] を用いる。これらはいずれも、ネットワークのトポロジとリンク重みを同時に生成するモデルである。これら 3 種類の生成モデルを用いて生成したグラフにおける、ノイズの標準偏差と Top_1 の関係を図 5 に示す。

この結果から、WE モデル、WECS モデル、CE モデルの順に、中心性指標に基づくノードランキングのノイズに対する耐性が高いことが分かる。これは、WE モデル、WECS モデル、CE モデルの順に次数分布の偏りが大きく、WE モデルは他のモデルと比べてノードの次数とそのノードに接続されるリンクの重みの相関が高いことが原因である。なおこの結果も、我々

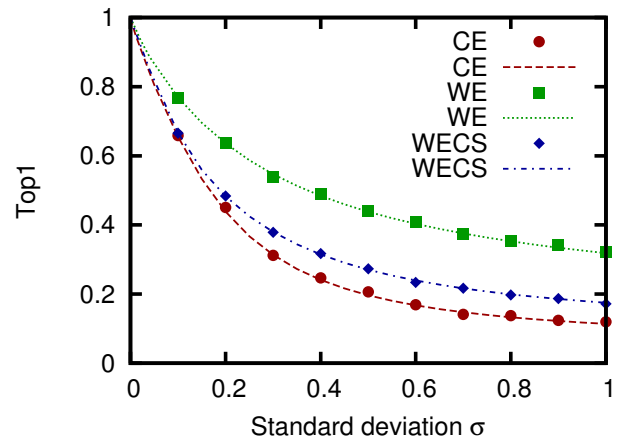


図 5: 異なる構造およびリンク重みの分布を持つグラフにおけるノイズの標準偏差 σ と Top_1 の関係 (ノード数:100、密度:約 0.05)

がシミュレーション実験によってリンク重みの量子化に対する中心性指標の耐性を調査した結果と矛盾していない [17]。

最後に、以上の実験における解析とシミュレーションの結果を比較することで、本解析の妥当性を検証する。これまでの全ての実験では、いずれの指標においても、またいずれのグラフにおいても、解析結果とシミュレーション結果の値の差は高々 1 % 程度であった。このことから、本解析の妥当性が確認できる。以上より、本稿の解析を用いることで、様々なグラフにおいてリンク重みのノイズに対する次数中心性に基づくノードランキングの耐性を分析することが可能であることが示された。

4 まとめと今後の課題

本稿では、リンク重みのノイズによって中心性指標に基づくノードのランキングがどの程度変動するかを数学的解析により明らかにした。中心性指標として次数中心性を対象とし、ノードランキングのロバスト性を評価する指標である Top_m および、 $Overlap_m$ を導出した。本稿の解析によって、任意のグラフにおいてこれらの指標の理論値を求めることを可能にした。さらに本稿の解析結果を用いて、様々なリンク重みや構造を持つグラフにおいて次数中心性に基づくノードランキングのリンク重みのノイズに対する耐性を調査した。その結果、ランダムグラフでは、リンク重みのノイズの影響は、グラフのノード数や密度によってそれほど大きく異ならないことを示した。

本稿では、リンク重みのノイズが中心性指標に基づくノードランキングに与える影響を解析的に明らかにする研究の最初のステップとして次数中心性を対象としたが、他の中心性指標を対象とした解析も重要な課題である。ただし、これまでの研究で、ネットワークに含まれる誤りに対する中心性指標の耐性は中心性指標の種類によってそれほど大きく異ならないことが知られているため [10, 17, 18]、検証の必要はあるが、本稿の解析結果から他の中心性指標の結果を類推することも可能であると考えている。また、ノードやリンクの追加 / 削除など他の種類のエラーの影響の解析や、複数の種類のエラーが同時に発生し

た場合の解析も重要な今後の課題である。

謝 辞

本研究は JSPS 科研費 25280030 の助成を受けたものである。

文 献

- [1] M. Rubinov and O. Sporns, “Complex network measures of brain connectivity: uses and interpretations,” *Neuroimage*, vol. 52, no. 3, pp. 1059–1069, Sep. 2010.
- [2] D. J. Watts, “A twenty-first century science,” *Nature*, vol. 445, no. 7127, p. 489, Feb. 2007.
- [3] S. Borgatti, A. Mehra, D. Brass, and G. Labianca, “Network analysis in the social sciences,” *Science*, vol. 323, no. 5916, pp. 892–895, Feb. 2009.
- [4] J. Chen and B. Yuan, “Detecting functional modules in the yeast protein–protein interaction network,” *Bioinformatics*, vol. 22, no. 18, pp. 2283–2290, Sep. 2006.
- [5] L. Freeman, “Centrality in social networks conceptual clarification,” *Social networks*, vol. 1, no. 3, pp. 215–239, 1979.
- [6] P. Bonacich, “Factoring and weighting approaches to status scores and clique identification,” *Journal of Mathematical Sociology*, vol. 2, no. 1, pp. 113–120, 1972.
- [7] S. Borgatti, “Identifying sets of key players in a social network,” *Computational & Mathematical Organization Theory*, vol. 12, no. 1, pp. 21–34, Apr. 2006.
- [8] D. Batallas and A. Yassine, “Information leaders in product development organizational networks: Social network analysis of the design structure matrix,” *IEEE Transactions on Engineering Management*, vol. 53, no. 4, pp. 570–582, Oct. 2006.
- [9] X.-N. Zuo, R. Ehmke, M. Mennes, D. Imperati, F. X. Castellanos, O. Sporns, and M. P. Milham, “Network centrality in the human functional connectome,” *Cerebral Cortex*, vol. 22, no. 8, pp. 1862–1875, Aug. 2012.
- [10] S. P. Borgatti, K. M. Carley, and D. Krackhardt, “On the robustness of centrality measures under conditions of imperfect data,” *Social Networks*, vol. 28, no. 2, pp. 124–136, May 2006.
- [11] S. H. Lee, P.-J. Kim, and H. Jeong, “Statistical properties of sampled networks,” *Physical Review*, vol. 73, no. 1, p. 016102, Jan. 2006.
- [12] T. L. Frantz, M. Cataldo, and K. Carley, “Robustness of centrality measures under uncertainty: Examining the role of network topology,” *Computational and Mathematical Organization Theory*, vol. 15, no. 4, pp. 303–328, Dec. 2009.
- [13] P. Kim and H. Jeong, “Reliability of rank order in sampled networks,” *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, vol. 55, no. 1, pp. 109–114, Jan. 2007.
- [14] E. Costenbader and T. Valente, “The stability of centrality measures when networks are sampled,” *Social networks*, vol. 25, no. 4, pp. 283–307, Sep. 2003.
- [15] N. Eagle, A. Pentland, and D. Lazer, “Inferring friendship network structure by using mobile phone data,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 106, no. 36, pp. 15 274–15 278, Jul. 2009.
- [16] G. Ghoshal and A. Barabási, “Ranking stability and super-stable nodes in complex networks,” *Nature Communications*, vol. 2, no. 394, pp. 1–7, Jul. 2011.
- [17] Y. Matsumoto, S. Tsugawa, H. Ohsaki, and M. Imase, “Robustness of centrality measures against link weight quantization in social network analysis,” in *Proceedings of the 4th Annual Workshop on Simplifying Complex Networks for Practitioners (SIMPLEX 2012)*, Apr. 2012, pp. 49–54.
- [18] M. Ishino, S. Tsugawa, and H. Ohsaki, “On the robustness of centrality measures against link weight quantization in real weighted social networks,” in *Proceedings of the 2nd International Workshop on Ambient Information Technologies (AMBIT 2013)*, Mar. 2013, pp. 25–28.
- [19] M. E. Newman, “Analysis of weighted networks,” *Physical Review E*, vol. 70, no. 5, p. 056131, Nov. 2004.
- [20] J. Kumpula, J. Onnela, J. Saramäki, J. Kertész, and K. Kaski, “Model of community emergence in weighted social networks,” *Computer Physics Communications*, vol. 180, no. 4, pp. 517–522, Dec. 2009.
- [21] A. Barrat, M. Barthélemy, and A. Vespignani, “Modeling the evolution of weighted networks,” *Physical Review E*, vol. 70, no. 6, p. 66149, Dec. 2004.
- [22] C. Li and G. Chen, “Modelling of weighted evolving networks with community structures,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 370, no. 2, pp. 869–876, Oct. 2006.