グラフ上の一般化ペグソリティア

山本　和明†　　　　武永　康彦†
† 電気通信大学電気通信学部

1. はじめに

ペグソリティアをもとにグラフ上のペグソリティアが考案され、研究が行われている[1]。本稿では標準的なペグソリティアを表せるようなグラフ上の一般化ペグソリティアを定義する。またパスとパスを 1 個の頂点で繋ぎ合わせたいくつかのグラフに対して、各初期配置に対する解の有無を明らかにする。標準的なペグソリティアの盤面を図 1 に示す。黒丸の頂点はペグがあることを示す。

2. グラフ上の一般化ペグソリティアの定義

グラフ上の一般化ペグソリティアの定義を与える。入力としてグラフ $G=(V,E)$ 、辺の分割 $E=E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_k, \forall i,j: E_i \cap E_j = \phi$ が与えられる。ペグは各頂点に配置される。辺 (x,y) と (y,z) が同じ辺の分割 E_i に属するとき、ペグは頂点 x から頂点 y を飛び越え頂点 z に移動することができる。また、S を初期盤面においての空の頂点集合、T を終了時にペグがある頂点の集合とする。ある S に対してペグを 1 個にできるグラフを solvable であるという。$S=\{l\}$ のときペグを 1 個にできるグラフを $S=\{l\}$ のとき solvable であるという。ペグが頂点 x から頂点 y を飛び越え頂点 z に移動することを $x \xrightarrow{y} z$ と表わす。飛び越える頂点が一意であるとき、飛び越える頂点を省略し $x \to z$ と表わす。また、$a \to b, b \to c, ..., x \to z$ といったように同一のペグを連続して移動させる場合 $a \to b \to c \to ... \to x \to z$ と表わす。

3. 単純なグラフ上のペグソリティア

3.1. パス上のペグソリティアの性質

頂点数が k 個のパス P_k と表わす。P_k 上の頂点を端から順に $1,2,...,k$ とする。空の頂点が 2 個以上連続してある頂点を empty bridge と呼ぶ[1]。[1]でパスに関する結果は以下の通りである。

定理 1　P_{2n} は $S=\{2\}$ のとき $T=\{2n-1\}$ にできるため solvable である。

定理 2　$P_{2n+1}(n \geq 2)$ は solvable でない。

上記の定理の証明に用いられたパス上のペグソリティアのいくつかの性質についてまとめ、証明を行った。

これらを用いて解をもつ初期盤面の条件を明らかにする以下の結果を示した。

定理 3　$P_{2n}(n \geq 2)$ は $S=\{2\},\{5\},\{k-1\},\{k-4\}$ のとき、そのときに限り solvable である。

3.2. 対象とするグラフ

本稿では頂点数が k のパス P_k 上の頂点 l と頂点数が 3 のパス P_3 のひとつの端点を共有したグラフを考える。このグラフを $P(k,l)$ とする。P_3 上の P_k に含まれない端点を β 、中心の点を α とする。また、P_k と P_3 が共有する頂点 l を接続点と呼ぶ。図 2 にグラフ $P(k,2)$ を示す。$E_1=\{(i,i+1) \mid i=1,2,...,k-1\}$, $E_2=\{(l,\alpha),(\alpha,\beta)\}$ とする。

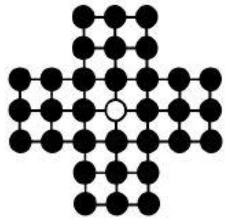

図1. 標準的なペグソリティアの盤面

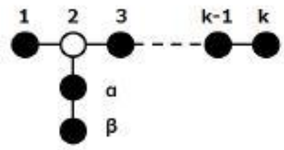

図 2. P_k と P_3 が接続したグラフ $P(k,2)$

3.3. 単純なグラフ上のペグソリティア

次のグラフに対して解をもつ初期盤面の条件を明らかにし結果を示した。

定理 4　$P(k,2)(k \geq 3)$ は $S=\{k\},\{k-2\},\{k-3\}$ であるとき、そのときに限り solvable である。

定理 5　$P(3,1)$ は solvable でない。

定理 6　$P(k,1)(k \geq 4)$ は k が偶数かつ $S=\{3\},\{k-1\},\{k-4\}$ であるとき、そのときに限り solvable である。

5. おわりに

今後は P_3 の中心の点で接続したグラフや両方のパスの長さを任意の長さにしたグラフについて solvable であるかを明らかにしたい。

参考文献

[1] Robert A. Beeler. and D. Paul Hoilman. Peg solitaire on graphs, Discrete Math., 311(2011) 2198-2202.