

# 近接勾配法に基づく LDPC 符号 の復号法について

名古屋工業大学  
和田山 正

wadayama@nitech.ac.jp

本研究の一部は科研費基盤 (A)JP22H00514 「深層展開に基づく信号処理アルゴリズム構築論の深化と展開」によりサポートされています。

## 講演の目標

本講演では論文

Wadayama and Takabe, “Proximal decoding for LDPC codes,”  
IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and  
Computer Sciences, vol. E106-A, no. 3 pp. 359-367 (2023).

の内容 (+  $\alpha$ ) について解説する.

- 2022 年度 電子情報通信学会 論文賞を受賞

- **研究の背景**
- 基礎的事項
- 提案法について
- 提案法の性能
- 今後の展開とまとめ

様々な分野において、誤り訂正符号はシステムが成立するために不可欠な技術となっている。

今後も特に下記の分野での活躍が期待されている:

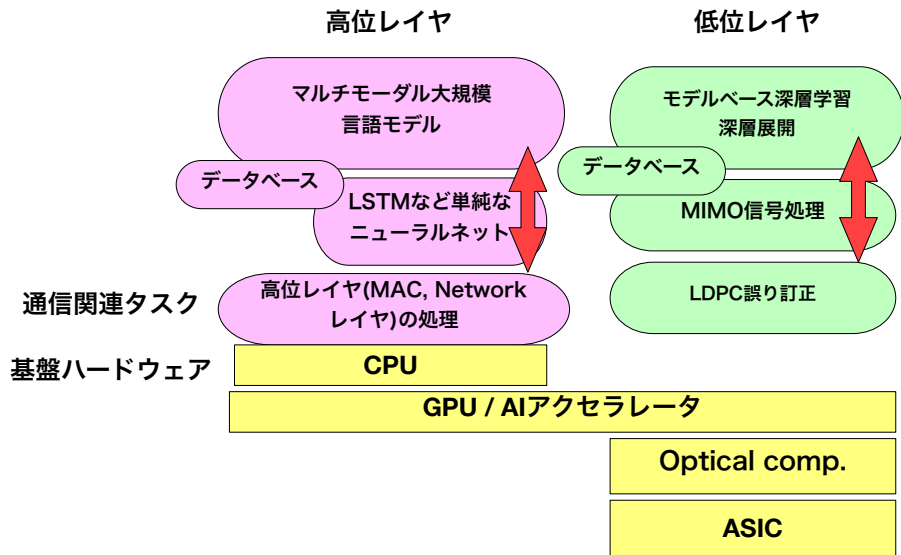
- 次世代無線通信技術 (6G) の実現
- 次世代ストレージデバイスの実現
- 量子コンピュータの実現 (量子誤り訂正符号)

# 次世代6Gシステムの技術目標

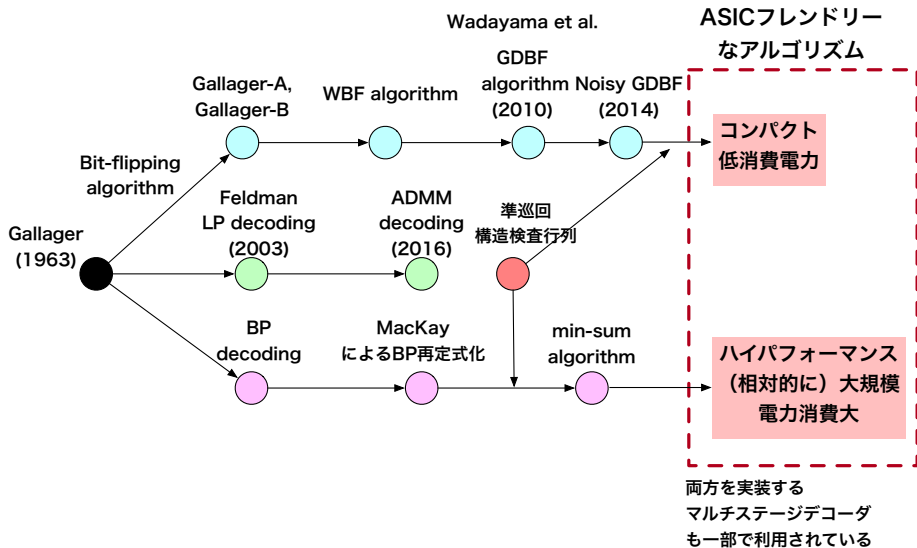
項目	要求値
データレート	1 Tbps (DL), 100Gbps (UL)
レーテンシー	0.1 ms
処理遅延	$\leq 10$ ns
モビリティ	1000km/h
信頼性	$10^{-9}$ (フレーム誤り率)
周波数効率	100bps/Hz
エネルギー効率	1pJ/bit

- 注意：モードがあるのですべてを同時に満たす必要はない。
- LDPC 復号処理が将来的に**ボトルネックになる可能性**も
- 符号・復号のさらなる研究開発の必要性

# 6G 世代の通信関連タスクの将来像 (個人的見解です)



# LDPC 復号アルゴリズムの系譜



# 次世代の復号アルゴリズムに求められるもの

ASIC フレンドリーなアルゴリズムは引き続き重要。しかしそれに加えて：

## テンソル計算フレンドリー

- 行列・ベクトル積演算がメイン
- 要素ごとの非線形演算を含む
- GPU/AI アクセラレータによるバッチ処理に適している
- プログラマブル光計算回路にも適している

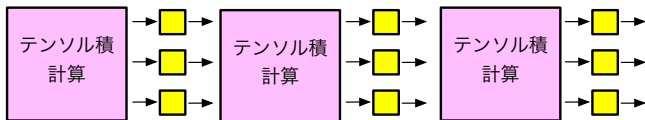
## AI フレンドリー

- 機械学習との親和性が高い (最適化ベース)
- 学習可能コンポーネントを導入可能 (プラグ&プレイ)
- すべてのサブブロックが微分可能 (微分可能プログラミング)



# 次世代の復号アルゴリズムに求められるもの

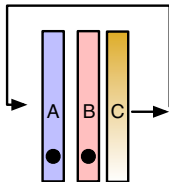
## テンソル計算フレンドリーな反復アルゴリズム



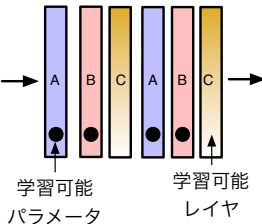
要素ごとの非線形処理

## AI フレンドリーな反復アルゴリズム

(a) 基礎となる  
反復アルゴリズム



(b) 展開された  
回路 (2 反復分)



三年前ぐらいから**テンソル計算フレンドリーかつ AI フレンドリーな復号アルゴリズムを作りたい**との思いが浮上

- 当時、深層展開の研究に力をいれて進めていたが競争が激しくなり (レッドオーシャン化) 若干疲弊感が発生
- 原点回帰を考える (= 符号を久しぶりにやってみよう)
- 当時スパース信号再現アルゴリズムを扱っていた
- ISTA と呼ばれるアルゴリズムが “テンソル計算フレンドリーかつ AI フレンドリー” であるとの認識を持つ
- ISTA と同じ構造をした LDPC 符号の復号法を作ればよいのでは...  
→ **近接勾配復号法**

- 研究の背景
- **基礎的事項**
- 提案法について
- 提案法の性能
- 今後の展開とまとめ

## LDPC 符号

疎検査行列  $H$  で定義される LDPC 符号は

$$\tilde{C}(H) \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n \mid H\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

と定義される。

- $n$ : 符号長
- $m$ : パリティシンボル数
- $H = \{H_{ij}\} \in \mathbb{F}_2^{m \times n}$ : 検査行列 (スパース 2 元行列)
- **パリティ検査条件 (バイナリ版):  $H\mathbf{x} = \mathbf{0}$**
- $A(i) \equiv \{j \mid j \in [n], H_{ij} = 1\} (i \in [m])$ : 非ゼロ列インデックス
- $B(j) \equiv \{i \mid i \in [m], H_{ij} = 1\} (j \in [n])$ : 非ゼロ行インデックス

## バイポーラ LDPC 符号

バイポーラ LDPC 符号を

$$C(\mathbf{H}) \equiv \{\beta(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \tilde{C}(\mathbf{H})\}$$

と定義する。ここでバイナリーバイポーラ変換:  $\beta(0) = 1, \beta(1) = -1$

### パリティ検査条件 (バイポーラ版)

任意の  $\mathbf{x} \in C(\mathbf{H})$  と任意の  $i$  について

$$\prod_{j \in A(i)} x_j = 1 \tag{1}$$

が成立.

# MAP 復号による LDPC 符号の復号

## 通信路モデル

- $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ : 通信路に対応する条件付き確率密度関数

## MAP 復号則

$$\hat{\mathbf{x}} \equiv \operatorname{argmax}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x}). \quad (2)$$

ここで  $p(\mathbf{x})$  は符号  $C(\mathbf{H})$  により定まる事前確率密度関数:

$$p(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{|C(\mathbf{H})|} \sum_{\mathbf{c} \in C(\mathbf{H})} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{c}). \quad (3)$$

$\delta$  はディラックのデルタ関数.

残念ながら多項式時間での正確な計算は絶望的.

# 事前分布を近似する: ギブス型事前分布の導入

- 負対数尤度関数:  $L(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \equiv -\ln p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$
- ギブス型事前分布:  $\tilde{p}(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{Z} \exp(-\gamma h(\mathbf{x}))$

ここで、ポテンシャルエネルギー関数  $h(\mathbf{x})$  として

$$h(\mathbf{x}) \begin{cases} = 0, & \mathbf{x} \in C(\mathbf{H}) \\ > 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

となる関数を取ると  $\gamma \rightarrow \infty$  のとき

$$\tilde{p}(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z} \exp(-\gamma h(\mathbf{x})) \rightarrow \frac{1}{|C(\mathbf{H})|} \sum_{\mathbf{c} \in C(\mathbf{H})} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{c}). \quad (5)$$

実際には、有限の  $\gamma$  を利用し下記の近似を利用:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) &\propto p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x}) \simeq p(\mathbf{y}|\mathbf{x})\tilde{p}(\mathbf{x}) \\ &= \exp(-L(\mathbf{x}; \mathbf{y}) - \gamma h(\mathbf{x})). \end{aligned} \quad (6)$$

## 近似MAP復号則

$$\hat{\mathbf{x}} \equiv \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} L(\mathbf{x}; \mathbf{y}) + \gamma h(\mathbf{x}) \quad (7)$$

- 連続最適化問題に帰着
- Feldman らの帰着では、線形計画問題 (凸計画問題) に帰着させているが、この帰着では非凸問題に帰着
- $L(\mathbf{x}; \mathbf{y})$  の部分を取り替えることでさまざまな通信路に適用可能
- 利用する最小化技法には、選択の自由度がある



# ポテンシャルエネルギー関数としての符号制約多項式

ポテンシャルエネルギー関数の選択には任意性があるがここでは以下の関数を利用。

## 符号制約多項式

$$h(\mathbf{x}) \equiv \sum_{j=1}^n (x_j^2 - 1)^2 + \sum_{i=1}^m \left( \left( \prod_{j \in A(i)} x_j \right) - 1 \right)^2 \quad (8)$$

- 第一項は**バイポーラ制約**に対応
- 第二項は**パリティ制約**に対応
- 符号語で値 0 を与えるペナルティ関数と見ることができる。
- GDBF 復号法 (2010) の目的関数から発想を得ている。
- $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, h(\mathbf{x}) \geq 0$ . 等号成立条件は  $\mathbf{x} \in C(\mathbf{H})$ .

## 圧縮センシング問題

- $x \in \mathbb{R}^n$  は非ゼロ要素数が  $n$  に対して小さい**スパースベクトル**
- 観測ベクトル  $y \in \mathbb{R}^m (m < n)$  は

$$y = Ax + w \quad (9)$$

と与えられる

- 行列  $A \in \mathbb{R}^{m \times n} (n > m)$  を観測行列と呼ぶ
- ベクトル  $w \in \mathbb{R}^m$  は雑音ベクトルであり  $\mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$  に従う

**目標:  $y$  から  $x$  を可能な限り高い精度で再現すること.**

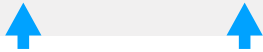
# LASSO 最小化

スパース信号再現問題を L1 正則化最小二乗問題として定式化

LASSO (凸計画問題)

「近さ」を表す

原信号の事前情報に  
基づく

$$\hat{x} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^N} \frac{1}{2} \|y - Ax\|_2^2 + \lambda \|x\|_1$$


二次項

- (1)  $y$  と  $Ax$  の誤差の小さい  $x$  を選好
- (2) 微分可能

L1-正則化項

- (1) 解の唯一性をもたらす
- (2) スパースベクトルを選好
- (3) 微分不可能 (原点にて)

ここで、 $\hat{x}$  は推定値であり、 $\lambda (> 0)$  は  $\ell_1$ -正則化項の相対的強さを調整する正則化係数である。

# 近接勾配法

関数  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  に対応する**近接写像** (proximal map) を

$$\text{prox}_h(\mathbf{x}) := \operatorname{argmin}_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n} \left( h(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|_2^2 \right) \quad (10)$$

と定義する。無制約最小化問題

$$\text{minimize } f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + h(\mathbf{x}), \quad (11)$$

を考える。ここで、 $g(\mathbf{x})$  は微分可能な凸関数であり、**通常  $h(\mathbf{x})$  は微分不可能な凸関数**である。

## 近接勾配法

上の最小化問題を解くための近接勾配法は、反復式

$$\mathbf{x}_{t+1} = \text{prox}_{\gamma h}(\mathbf{x}_t - \gamma \nabla g(\mathbf{x}_t)), \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

により与えられる

# ISTA (Iterative Soft Thresholding Algorithm)

## ISTA の定義

近接勾配法から導かれる ISTA の反復式は次のとおり:

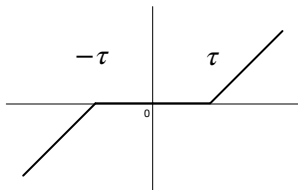
$$\mathbf{r}_t = \mathbf{s}_t + \gamma \mathbf{A}^T (\mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{s}_t) \quad (13)$$

$$\mathbf{s}_{t+1} = \eta_{\gamma\lambda}(\mathbf{r}_t), \quad t = 0, 1, \dots \quad (14)$$

ここで  $\eta_\tau$  はソフトしきい値関数 ( $= \tau \|x\|_1$  の近接写像) であり,

$$\eta_\tau(x) := \text{sign}(x) \max\{|x| - \tau, 0\}$$

と定義される



- 研究の背景
- 基礎的事項
- 提案法について
- 提案法の性能
- 今後の展開とまとめ

# 近接勾配復号法 (Wadayama&Takabe, 2023)

近似 MAP 復号問題をどう解く？

$$\hat{\mathbf{x}} \equiv \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} L(\mathbf{x}; \mathbf{y}) + \gamma h(\mathbf{x}). \quad (15)$$

- 近接勾配法を利用する
- $h(\mathbf{x})$  の近接写像の近似:

$$\operatorname{prox}_{\gamma h}(\mathbf{x}) \simeq \mathbf{x} - \gamma \nabla h(\mathbf{x}), \quad (16)$$

## 近接勾配復号法 (Proximal decoding)

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{s}^{(k)} - \omega \nabla L(\mathbf{s}^{(k)}; \mathbf{y}) \quad (17)$$

$$\mathbf{s}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)} - \gamma \nabla h(\mathbf{r}^{(k+1)}), \quad (18)$$

for  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,

## 近接勾配復号法 (Proximal decoding)

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{s}^{(k)} - \omega \nabla L(\mathbf{s}^{(k)}; \mathbf{y}) \quad (19)$$

$$\mathbf{s}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)} - \gamma \nabla h(\mathbf{r}^{(k+1)}), \quad (20)$$

for  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,

- 式 (19) を **勾配降下ステップ** と呼ぶ。負対数尤度の最小化
- 式 (20) を **符号近接ステップ** と呼ぶ。符号語への引き込み
- 負対数尤度関数の勾配が効率よく計算できれば、どのような通信路にでも対応できる
- 定数  $\omega, \gamma$  の設定が **復号性能に大きな影響** を与える。



---

## Algorithm 1 Proximal decoding (general form)

---

- 1:  $\mathbf{s}^{(0)} := \mathbf{0}$
  - 2: **for**  $k := 0$  to  $K - 1$  **do**
  - 3:      $\mathbf{r}^{(k+1)} := \mathbf{s}^{(k)} - \omega \nabla L(\mathbf{s}^{(k)}; \mathbf{y})$
  - 4:     Compute  $\nabla h(\mathbf{r}^{(k+1)})$  according to (4).
  - 5:      $\mathbf{s}^{(k+1)} := \mathbf{r}^{(k+1)} - \gamma \nabla h(\mathbf{r}^{(k+1)})$
  - 6:      $\hat{\mathbf{x}} := \text{sign}(\mathbf{s}^{(k+1)})$
  - 7:     If  $\hat{\mathbf{x}}$  passes the parity-check condition, break the loop.
  - 8: **end for**
  - 9: Output  $\hat{\mathbf{x}}$
-

# 符号制約多項式の勾配ベクトル

$$\frac{\partial}{\partial x_k} h(\mathbf{x}) = 4(x_k^2 - 1)x_k + \frac{2}{x_k} \sum_{i \in B(k)} \left( \left( \prod_{j \in A(i)} x_j \right)^2 - \prod_{j \in A(i)} x_j \right).$$

行列ベクトル積に基づく勾配計算 (to be submitted to ISIT2024)

$$\nabla h(\mathbf{x}) = 4 \exp(\mathbf{z}_{-1} + \mathbf{z} + \mathbf{z}_{+1}) + 2 \exp(\mathbf{w} - \mathbf{z}), \quad (21)$$

where  $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{w}_{-1}$ ,  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{w}_{+1}$  are defined by

$$\mathbf{z} \equiv \ln(\mathbf{x}), \quad (22)$$

$$\mathbf{z}_{-1} \equiv \ln(\mathbf{x} - \mathbf{1}), \quad (23)$$

$$\mathbf{z}_{+1} \equiv \ln(\mathbf{x} + \mathbf{1}), \quad (24)$$

$$\mathbf{w} \equiv \ln(\mathbf{H}^T (\exp(2\mathbf{H}\mathbf{z}) - \exp(\mathbf{H}\mathbf{z}))). \quad (25)$$

$\nabla h(\mathbf{x})$  の計算は下記の基本演算の組み合わせで計算できる

## $\nabla h(\mathbf{x})$ の評価に必要な演算

- 行列ベクトル積計算
- スカラー乗算,  $\alpha \mathbf{x}$  ( $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ ).
- 対数関数  $\ln : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
- 指数関数  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
- ベクトル和, ベクトル差,  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ .

これらは AI アクセラレータが備える**基本演算 (ミニмумセット)** .

もちろん, 他にも効率的に実行できる演算 (例: スパース行列・ベクトル積) が AI アクセラレータに備わっている場合にはそれらを使うことで計算効率を向上できる

## AWGN 通信路における近似 MAP 復号則

$$\hat{\mathbf{x}} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + \gamma h(\mathbf{x}) \quad (26)$$

ここで,  $\nabla \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ .

## AWGN 通信路向け近接勾配復号法

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{s}^{(k)} - \omega(\mathbf{s}^{(k)} - \mathbf{y}) \quad (27)$$

$$\mathbf{s}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)} - \gamma \nabla h(\mathbf{r}^{(k+1)}). \quad (28)$$

# MIMO 通信路の場合

## MIMO 通信路モデル (実数モデル)

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{w} \quad (29)$$

## 尤度関数

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = a \exp(-b\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|^2) \quad (30)$$

## 近似 MAP 復号則

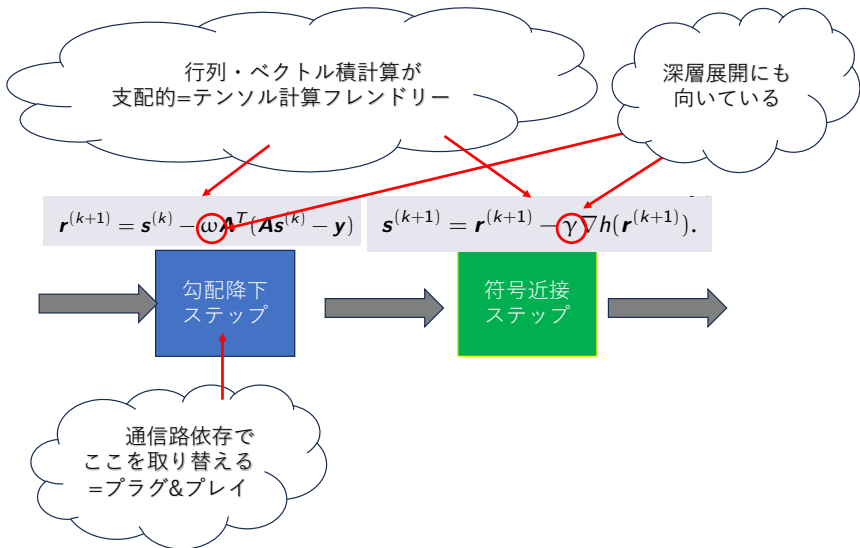
$$\hat{\mathbf{x}} \equiv \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 + \gamma h(\mathbf{x}). \quad (31)$$

## MIMO 通信路向け近接勾配復号法

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{s}^{(k)} - \omega \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{s}^{(k)} - \mathbf{y}) \quad (32)$$

$$\mathbf{s}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)} - \gamma \nabla h(\mathbf{r}^{(k+1)}). \quad (33)$$

# MIMO 近接勾配復号法のブロック図



# 非線形ベクトル通信路

## 非線形ベクトル通信路モデル

例えばパワーアンプの非線形性, PAPR 改善用クリッピングなど.

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) + \mathbf{w} \quad (34)$$

雑音は AWGN を仮定.

## 近似 MAP 復号則

$$\hat{\mathbf{x}} \equiv \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{y} - f(\mathbf{x})\|^2 + \gamma h(\mathbf{x}) \quad (35)$$

## 近接勾配復号法

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{s}^{(k)} - \omega \nabla \|\mathbf{y} - f(\mathbf{s}^{(k)})\|^2 \quad (36)$$

$$\mathbf{s}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)} - \gamma \nabla h(\mathbf{r}^{(k+1)}). \quad (37)$$

# $\nabla\|y - f(s^{(k)})\|^2$ を効率よく計算できるか？

## ケース 1: コンポーネントワイズ非線形性の場合

$f(x) \equiv g(Ax)$  と書ける場合について考える。

$$\frac{1}{2}\nabla\|y - g(Ax)\|^2 = -A^T((y - g(Ax)) \odot g'(Ax)), \quad (38)$$

(注：複素の場合は違う形になるので注意。下記論文参照のこと)

S. Takabe, T. Wadayama, and Y. C. Eldar, “Complex trainable ISTA for linear and nonlinear inverse problems,” 2020 IEEE ICASSP2020, 2020.

## ケース 2: 一般の場合

誤差逆伝播法を利用する。例えば、

- $f(x)$  を物理モデルに従い表現、または
- $f(x)$  をニューラルネットワークで表現

復号途中に誤差逆伝播法により尤度勾配  $\nabla\|y - f(s^{(k)})\|^2$  を計算。



- 研究の背景
- 基礎的事項
- 提案法について
- **提案法の性能**
- 今後の展開とまとめ

- アルゴリズム: MIMO 向け近接勾配復号法
- 送受信アンテナ数  $N = M = 102$
- LDPC 符号 ( $n = 204, m = 102$ )
- チャネル行列: クロネッカーモデル
- 送信信号: QPSK
- ベースライン:
  - MMSE

$$\hat{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T + (\sigma_w^2/2)\mathbf{I})^{-1} \mathbf{y} \quad (39)$$

- tanh detector

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{s}^{(k)} - \omega \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{s}^{(k)} - \mathbf{y}), \quad (40)$$

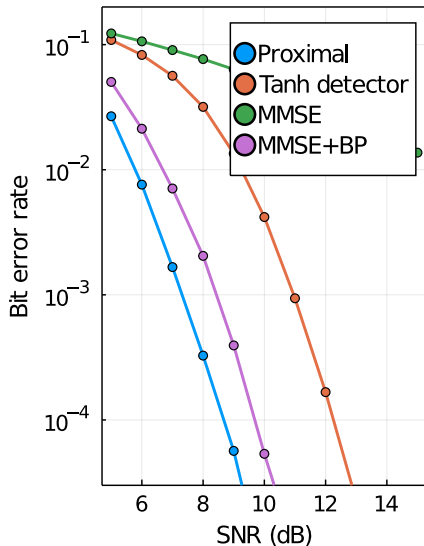
$$\mathbf{s}^{(k+1)} = \tanh(\alpha \mathbf{r}^{(k+1)}), \quad (41)$$

- MMSE + BP

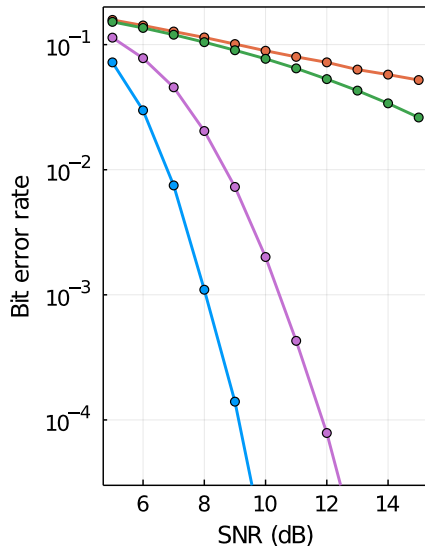
# 近接勾配復号法の BER 特性

LDPC 符号化 MIMO 通信路 (クロネッカーモデル)

$\rho = 0.0$



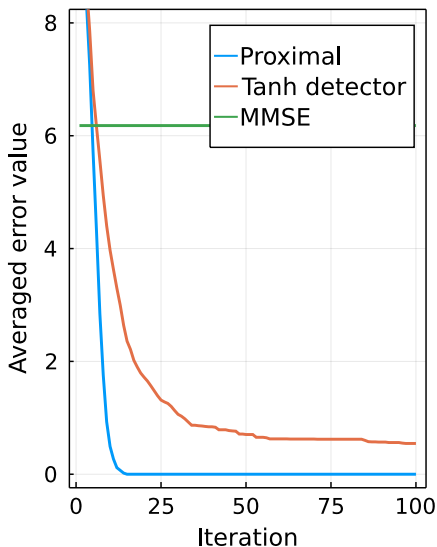
$\rho = 0.4$



# 近接勾配復号法の収束特性

LDPC 符号化 MIMO 通信路 (クロネッカーモデル)

SNR = 10dB



# 相関性ガウス通信路の場合

## 通信路モデル

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{w} \quad (42)$$

ここで,

$$\mathbf{w} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma) \quad (43)$$

## 近似 MAP 復号則

$$\hat{\mathbf{x}} \equiv \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x})^T \mathbf{G}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \gamma h(\mathbf{x}) \quad (44)$$

ここで,  $\mathbf{G} = \Sigma^{-1}$ .

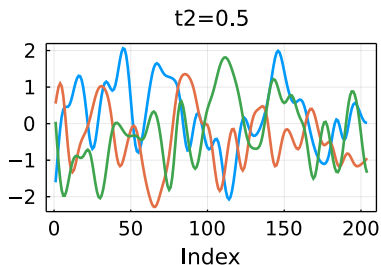
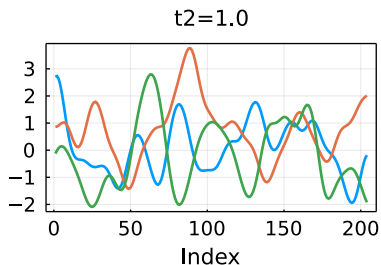
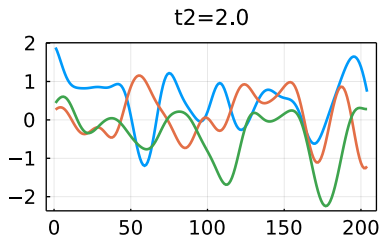
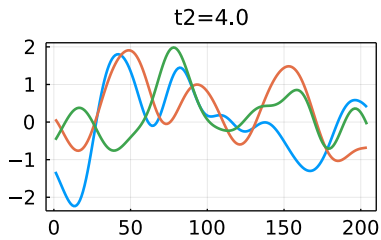
## 近接勾配復号法

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{s}^{(k)} - \omega \mathbf{G}(\mathbf{s}^{(k)} - \mathbf{y}) \quad (45)$$

$$\mathbf{s}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)} - \gamma \nabla h(\mathbf{r}^{(k+1)}). \quad (46)$$

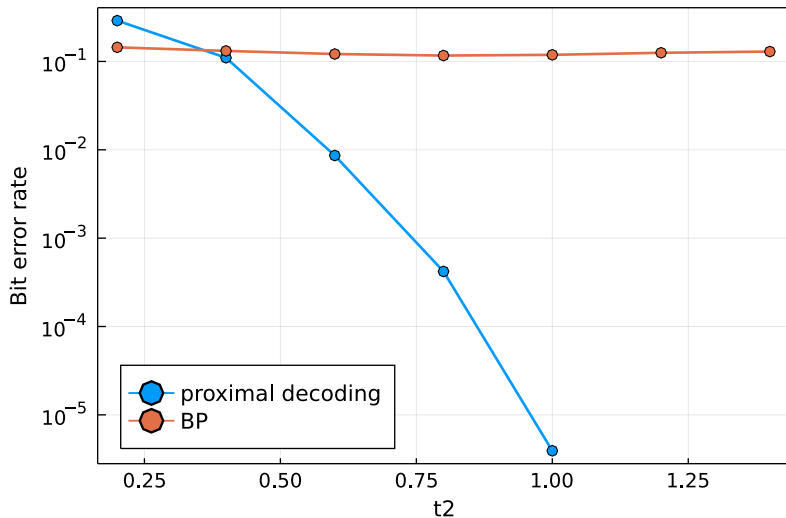
# 相関性ガウス雑音の例

相関性ガウス雑音  $\simeq$  ガウス過程 (ガウスカーネルを仮定)



# 近接勾配復号法の BER 特性

相関性ガウス雑音通信路



# 共分散行列が送信信号に依存する場合

リーマン的信号空間 (甘利, 情報理論 (ダイヤモンド社), pp.197–200)

- 信号依存性の共分散行列  $\Sigma(\mathbf{x})$  (例えば量子化通信路)
- $G(\mathbf{x}) = \Sigma(\mathbf{x})^{-1}$  は信号空間上の計量行列  $\rightarrow$  リーマン空間を定める

## 近似 MAP 復号則

$$\hat{\mathbf{x}} \equiv \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x})^T \mathbf{G}(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \gamma h(\mathbf{x}) \quad (47)$$

## 近接勾配法

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{s}^{(k)} - \omega \mathbf{G}(\mathbf{x})(\mathbf{s}^{(k)} - \mathbf{y}) \quad (48)$$

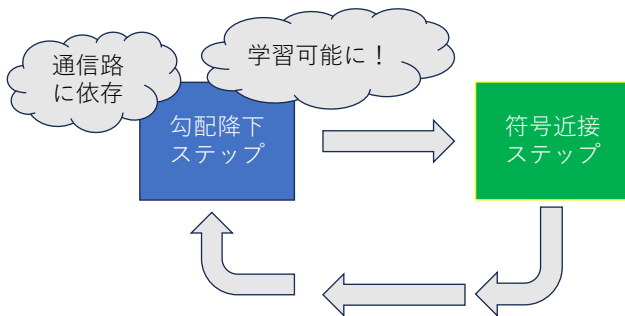
$$\mathbf{s}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)} - \gamma \nabla h(\mathbf{r}^{(k+1)}). \quad (49)$$



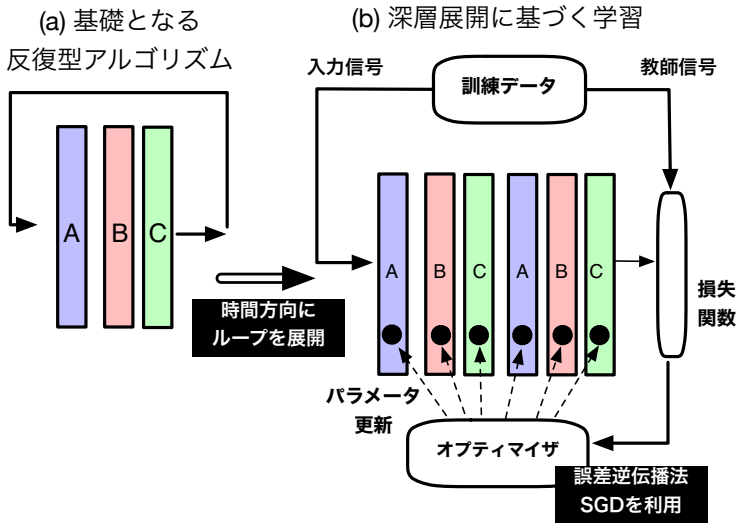
- 研究の背景
- 基礎的事項
- 提案法について
- 提案法の性能
- 今後の展開とまとめ

# 深層学習的手法との融合 (AIフレンドリー性の利用)

- 勾配降下ステップをニューラルネットに  $\rightarrow \nabla \ln p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$  を学習 (スコア関数学習) することで様々な通信路に適応可能.
- 深層展開に基づく学習可能パラメータの調整 (現在検討中)



# 深層展開における学習プロセス

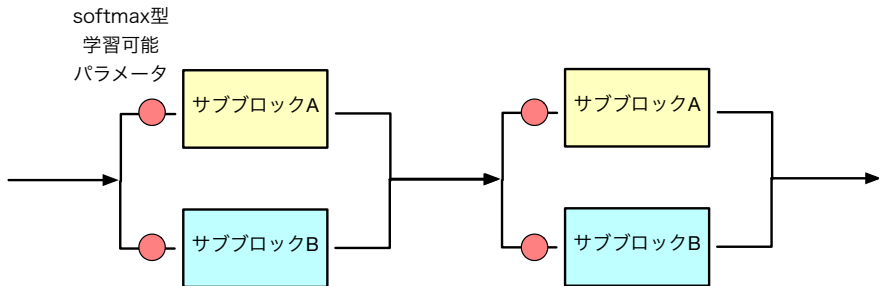


参考書籍：「モデルベース深層学習と深層展開」（和田山, 森北出版, 2023）

# 深層展開における構造学習

長久, 早川, 飯國, “圧縮センシングアルゴリズムの構造学習”, 第 38 回信号処理シンポジウム, 2023.

DARTS(Differentiable Architecture Search): 微分可能構造探索を深層展開に適用 → ISTA において非自明な更新ルールの発見



プログラマブル光回路に基づくアナログコンピューティングを目指して

## 勾配流復号法 (Gradient Flow 復号法; GF 復号法)

勾配流復号法は, 常微分方程式

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = -(\mathbf{x} - \mathbf{y} + \nabla h(\mathbf{x})) \quad (50)$$

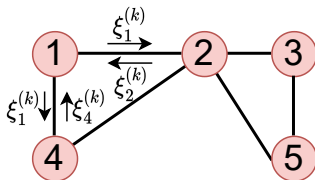
$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (51)$$

によって定義される.

Wadayama, Nakajima, and Nakai-Kasai, "Gradient flow decoding for LDPC codes," 2023 International Symposium on Topics in Coding (ISTC2023), Brest, France, 2023.

# 分散信号処理との融合

負荷分散のための**完全分散型復号**への方向性



## CoopST(完全分散型近接勾配法)

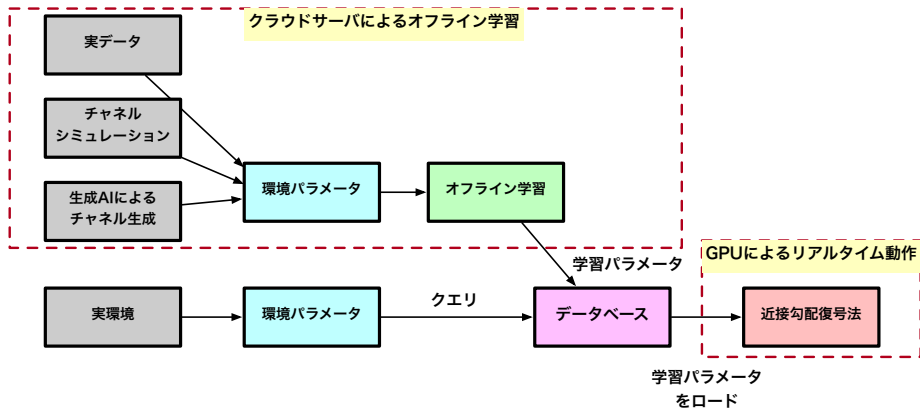
$$\mathbf{z}_k^{(t+1)} = \sum_{j=1}^K w_{kj} \boldsymbol{\xi}_j^{(t)} \quad (52)$$

$$\boldsymbol{\xi}_k^{(t+1)} = S_{s\lambda_k} \left( \mathbf{z}_k^{(t+1)} - s \mathbf{A}_k^T (\mathbf{A}_k \mathbf{z}_k^{(t+1)} - \mathbf{b}_k) \right), \quad (53)$$

Hayashi and Nagahara, “Distributed sparse optimization for source localization over diffusion fields with cooperative spatiotemporal sensing,” *Advanced Robotics*, 2023, vol. 37, no. 3, pp. 183–197.

# オフライン学習とリアルタイム復号処理

## 学習プロセスも含めた AI ワークフローの検討



Wei and Wadayama, "Vector similarity search based offline learning for deep-unfolded MIMO signal detector", IEEE ICMLCN, to be presented, 2024.

# 拡散モデルとの関係性

近接勾配復号プロセスは**拡散モデル** (diffusion model) によく似ている  
条件付き生成:

$$\nabla \ln p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \nabla \ln p(\mathbf{x}) + \nabla \ln p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \quad (54)$$

- $\nabla \ln p(\mathbf{x})$ : **スコア関数** (NN を利用しデータから学習)
- $\nabla \ln p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ : **ガイド関数** (クラス判別関数など)
- ランジュバンサンプリングにより  $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$  に従うサンプルを出力

拡散モデルの分野で利用されている方法論の近似 MAP 復号問題への転用

- 確率的ランジュバン動力学に基づく信号再現 (サンプリングベース)
- 逆拡散プロセスの導入



- 本講演では論文“Proximal decoding for LDPC codes”の解説(とプラサルファ)を行った。
- 近接勾配復号法  
= (1) 近似 MAP 復号問題への帰着 + (2) 近接勾配法
- MIMO 通信路では、既存方式に対して復号性能で競争力を持つ
- さまざまな通信路に対応できる高い柔軟性
- モジュラー設計(復号器/MIMO 検出) → 統合設計
- テンソル計算フレンドリーかつ AI フレンドリー

本講演の内容に沿って ESS Fundamentals Review 誌に解説論文を執筆予定(2024)です。そちらもぜひご覧ください！