

通信路容量と無限次元最適化

2019年3月22日

池田 恩朗 (統数研)

① はじめに

② 通信路容量の問題とこれまでの知見

③ 証明の手順

④ 我々の扱った問題

⑤ まとめ

確率測度の最適化

2007.3. 情報統計工学のワークショップ (イスラエル・Eilat)

神経スパイクの統計 ---- 篠本 (京大)

通信路容量に関する一般論 ... Guo (Northwest大)

2008-2009 オーストラリア滞在中, J. Manton と共同研究.

「スパイクを用いた神経通信路の通信路容量」

2010-2013 統数研 共同利用

「確率測度の最適化と通信路容量」

渡辺 (豊橋), 田中 (京大), 竹内 (九大), 駒木 (東大)

伊藤 (統数研)

① はじめに

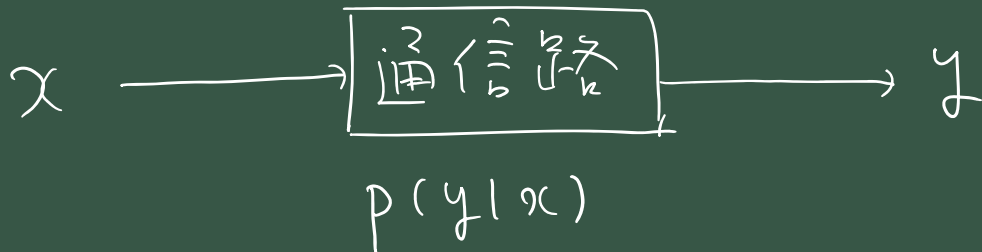
② 通信路容量の問題とこれまでの知見

③ 証明の手順

④ 我々の扱った問題

⑤ まとめ

通信路容量



通信路容量

$$C = \sup_{\pi(x)} I(X; Y)$$

$$\text{subj. to } \pi(x) \in \mathcal{P}$$

相互情報量

$$I(X; Y) = \int \int \pi(x) p(y|x) \log_2 \frac{p(y|x)}{p(y; \pi)} dy dx$$

$$\underline{p(y; \pi)} = \int p(y|x) \pi(x) dx$$

通信路容量と測度の最適化

① X と Y が有限のアルファベット

\Rightarrow 有本 - Blahut アルゴリズム

最適な X の分布と容量が求まる。

② X が連続, Y が有限のアルファベット

\Rightarrow X も有限個の点で充分である

③ X と Y が連続, $p(y|x)$ が 連続分布 のとき,

\Rightarrow X の最適な分布は測度の最適化によって求まる

通信路容量は 通信路 $p(y|x)$ と x に関する制約 との
組み合わせで決まる最適化問題の解である。

応用先

① 神経細胞 → 測定へのガイドライン

② 通信理論 → 入力分布の最適化 = 変調方式の選択

適応変調への応用

(池田, 林, 田中)

例 1. Shannon (1948)

通信路: AWGN

$$p(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}\right)$$

入力の制約: 平均パワー制約

$$\mathcal{P} = \left\{ \pi(x) \mid \int \pi(x) x^2 dx \leq E \right\}$$

$$C = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{E}{\sigma^2} \right) = \frac{1}{2} \log_2 (1 + \text{SNR})$$

$$\pi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi E}} \exp\left(-\frac{x^2}{2E}\right)$$

例 2. Smith (1971)

通信路: AWGN

$$p(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}\right)$$

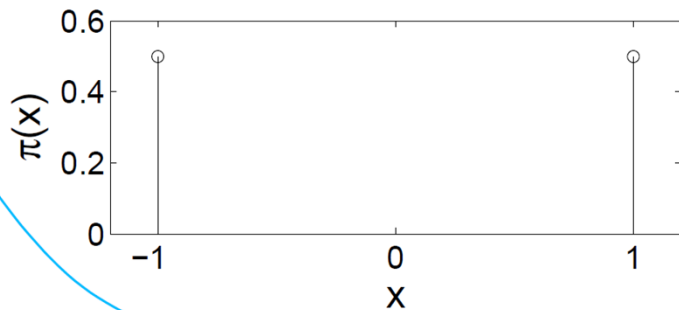
入力の制約: 最大パワー制約

$$\mathcal{P} = \{ \pi(x) \mid |x| \leq a \}$$

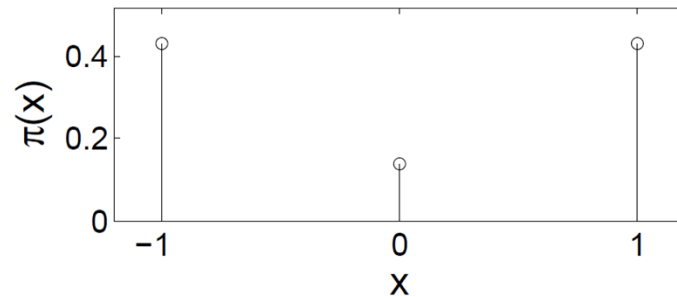
$\pi^*(x)$ について

- 有限個の点から成る離散分布
- 点の個数, 位置は a と σ^2 の関係から決まる
- 容量は解析的な式では表現できない

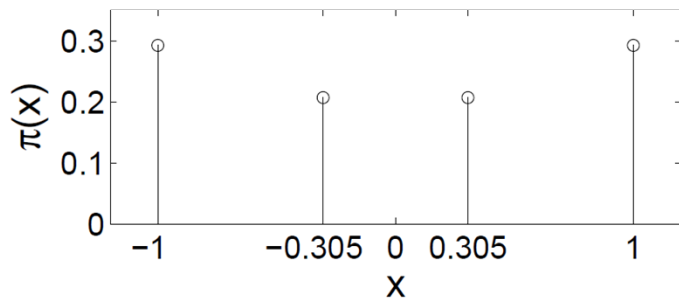
② $p\text{SNR} = E_{\max}/\sigma^2$. 1次元では E_{\max} を固定し、
ノイズの分散を小さくしていった。



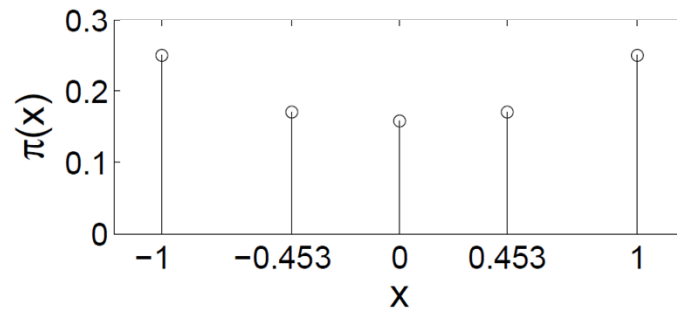
(a) $p\text{SNR} = 1$ のとき.



(b) $p\text{SNR} = 4$ のとき.



(c) $p\text{SNR} = 16$ のとき.



(d) $p\text{SNR} = 25$ のとき.

Figure: 1次元 AWGN 通信路に対する最大出力制約下での最適な入力分布.

$p\text{SNR} \rightarrow$ 大で点の数が増える
 $p\text{SNR} \rightarrow \infty$ の極限で、一様分布になる。

例 3

通信路: AWGN

$$p(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}\right)$$

入力の制約:

$$\mathcal{P} = \left\{ \pi(x) \mid E[x^2] \leq m_2, E[x^4] \leq m_4 \right\}$$

--- Abou-Faycal, Trott, & Shamai (Shitz) (2001)

$$\mathcal{P} = \left\{ \pi(x) \mid E[x^{2+\varepsilon}] \leq m \right\} \quad \dots \text{Palanki (2002)}$$

$\pi^*(x)$ について

- 有限個の点から成る離散分布
- 点の個数, 位置は α と σ^2 の関係から決まる
- 容量は解析的な式では表現できない

例 4

通信路

- Poisson Channel (Shamai (Shitz) 1990)
- Vector Fading Channel (Gursoy, et. al 2002)
- General additive channel (Tchamkerten 2004)
- Neuron Channel (Ikeda & Manton 2009)

同様の議論は Bayes 統計の分野でも議論されている
reference prior という事前分布の研究。

① はじめに

② 通信路容量の問題とこれまでの知見

③ 証明の手順

④ 我々の扱った問題

⑤ まとめ

証明の手順 (Smith 1971)

$$\pi(x) dx \longrightarrow dF(x)$$

密度関数 \mathcal{P} \longrightarrow 累積密度関数 $\mathcal{F} = \{F(x)\}$
(弱収束を議論するため)

$$I(x; \mathcal{Y}) = \iint p(y|x) \log \frac{p(y|x)}{p(y; \mathcal{F})} dy dF(x)$$

$$= \int \underline{KL(p(y|x), p(y; \mathcal{F}))} dF(x)$$

$$= \int \underline{i(x; \mathcal{F})} dF(x)$$

$$= I(\mathcal{F}) \quad \dots \quad \underline{\mathcal{F} \text{ の汎関数}}$$

$$p(y; \mathcal{F}) = \int p(y|x) dF(x).$$

証明の手順

1. F が コンパクト で $I(F)$ が concave であることを示す.

2. 以下の F_0 における F' の方向 微分 が 常に存在 であることを確かめる.

$$I_{F_0}(F') = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{I((1-\eta)F_0 + \eta F') - I(F_0)}{\eta}$$

3. F_0 が 最適 であるための KKT 条件 を示す.

4. F_0 が 無限個 の点をもつと仮定し、矛盾 を導く.

ステップ 2

$I_{F_0}(F')$ の一般形

$$I_{F_0}(F') = \int i(x; F_0) dF'(x) - I(F_0)$$

$$i(x; F_0) = \int p(y|x) \log \frac{p(y|x)}{p(y; F_0)} dy$$

... KLダイバージェンス

ステイン 7°3

KKT 条件

F_0 が最適ならば、全ての $F' \in \mathcal{F}$ に対して

$$I_{F_0}(F') \leq 0 \quad \text{が成り立つ. したがって}$$

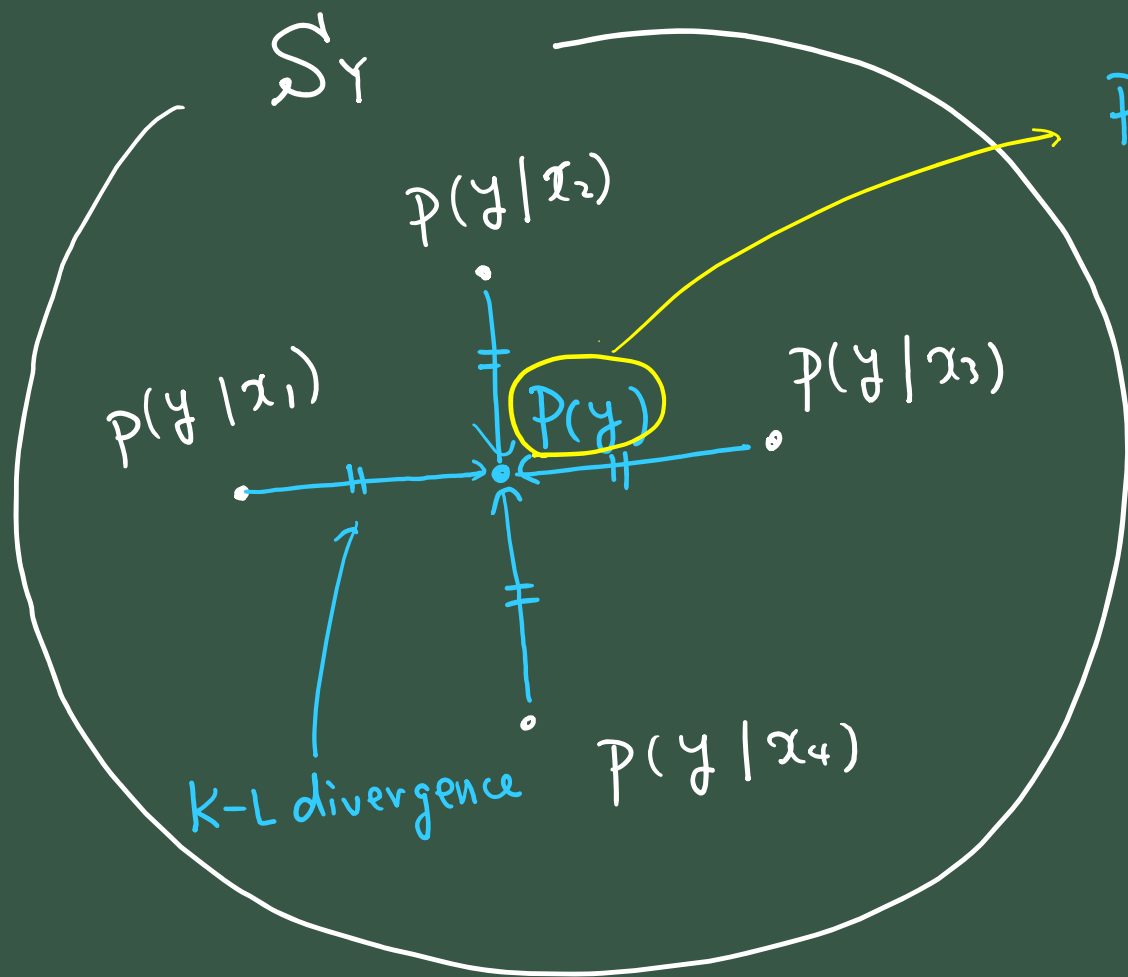
$$\int i(x; F_0) dF'(x) \leq I(F_0) = C$$

Corollary (Smith 1971)

$$i(x; F_0) \begin{cases} = C & \text{for } x \in E_0 \\ \leq C & \text{for } x \notin E_0 \end{cases}$$

$$E_0 = \{x \mid F_0 \text{ の増加点}\}$$

② 通信路容量と情報幾何 離散分布のとき.



$$p(y) = \sum_i p(y|x_i) \pi(x_i)$$

$p(y|x_i)$ から $p(y)$ までの

K-L divergence が等しい.

ステップ4

x を 複素数 $z \in \mathbb{C}$ に拡張

$i(z; F_0)$ が実軸上で正則かどうか調べる

F_0 が無限個の点をもつと仮定

\Rightarrow ある閉区間に無限個の点 \Rightarrow 収束する部分列が存在する

\Rightarrow 一致の定理より $i(z; F_0) = c$ か $i(z; F_0)$ が正則な領域で成り立つ

\Rightarrow 実軸上で $i(x; F_0) = c$

\Rightarrow 矛盾 \Rightarrow 有限個の孤立点 \Rightarrow 離散分布

アルゴリズム: 準備

AWGN (ノイズレベル σ^2) 最大パワー-制約 ($|x| \leq 1$)

$$i(x; F) = \int p(y|x) \log_2 \frac{p(y|x)}{p(y; F)} dy$$

$$= \int p(y|x) \log_2 p(y|x) dy - \int p(y|x) \log_2 p(y; F) dy$$

$$= H(\sigma^2) - \int p(y|x) \log_2 p(y; F) dy$$

↑

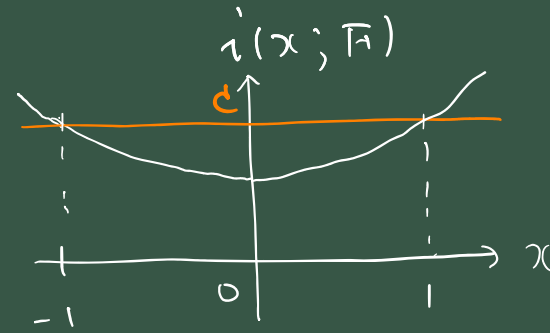
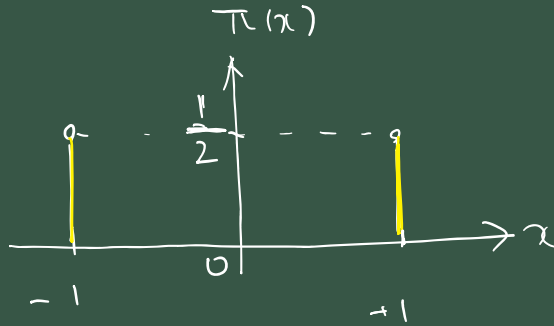
エルミート・ガウス積分で評価.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx \doteq \sum_{i=1}^N w_i f(x_i)$$

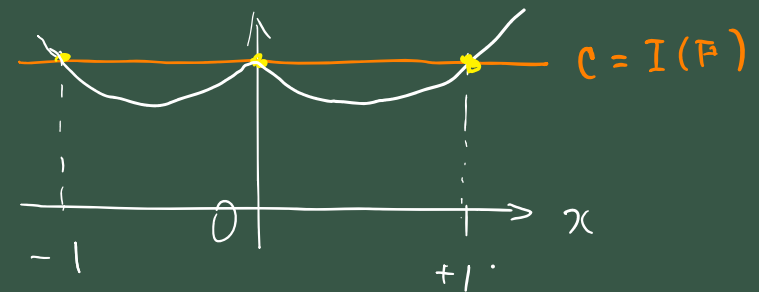
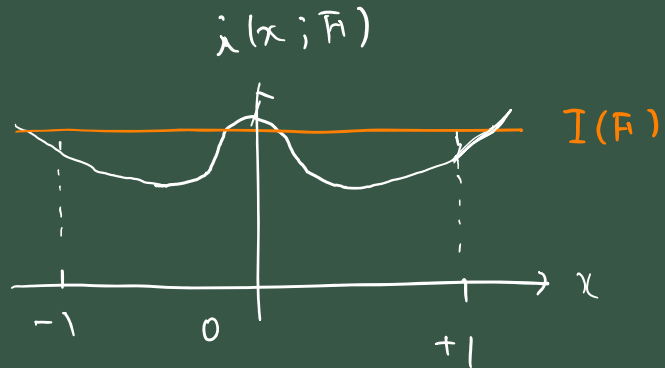
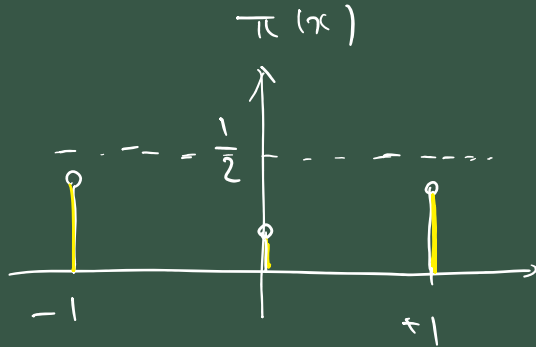
$i(x; F)$ を $-1 \leq x \leq 1$ で評価できようようにしておく.

アルゴリズム

σ^2 が大きいとき



σ^2 を小さくしていく



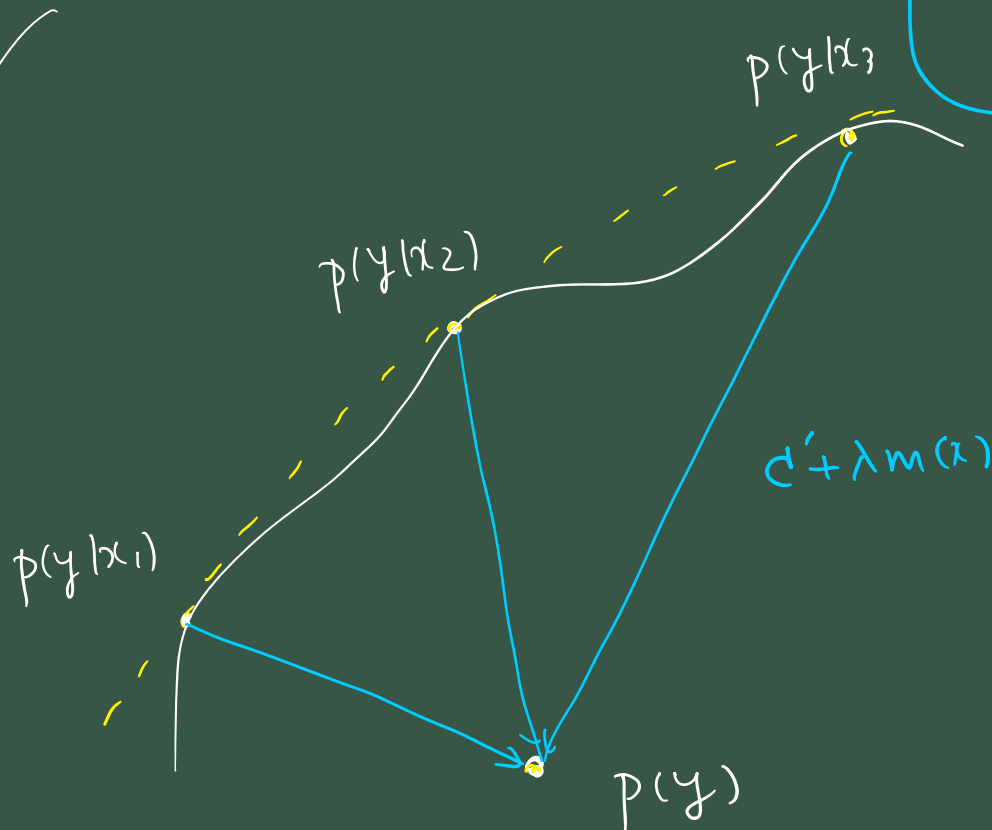
⑥ KKT-condition

$$i(x; F_0) = \text{KL}(p(y|x); p(y; F_0))$$

$$i(x; F_0) \begin{cases} = C + \underbrace{\lambda(m(x) - M)} & \text{for } x \in F_0 \\ \leq C + \underbrace{\lambda(m(x) - M)} & \text{for } x \notin F_0 \end{cases}$$

② 連続分布のとき.

\int_Y



for $x \in E_0$

$$KL(p(y|x); p(y)) = c' + \lambda m(x)$$

for $x \notin E_0$

$$KL(p(y|x); p(y)) \leq c' + \lambda m(x)$$

① はじめに

② 通信路容量の問題とこれまでの知見

③ 証明の手順

④ 我々の扱った問題

⑤ まとめ

① 入力 X の分布 $\pi(x)$ の選択は 変調方式 (modulation) を選ぶことに対応する。

② 最も良い変調方式は通信路容量を達成する分布 $\hat{\pi}(x)$ である (もし存在するのなら)。

($\hat{\pi}(x)$ を変調方式として選んだとしても通信路容量を達成できずわけではない (誤り訂正)).

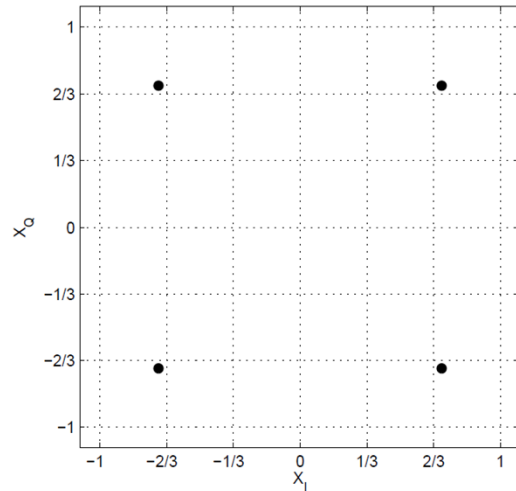


- 実際のデジタル通信の変調方式はどの程度良いのか?
- 改善できる余地は?

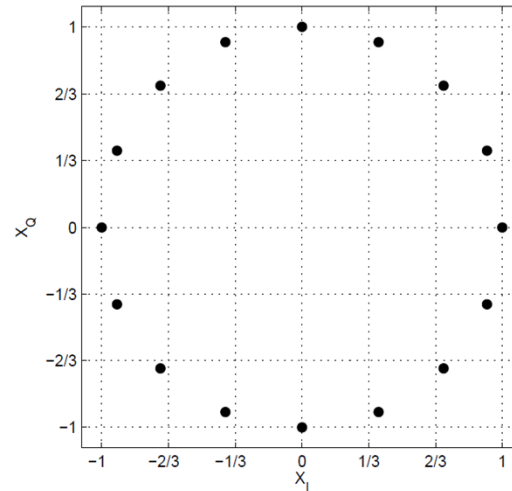
②

X_I : 同相成分 (in-phase)

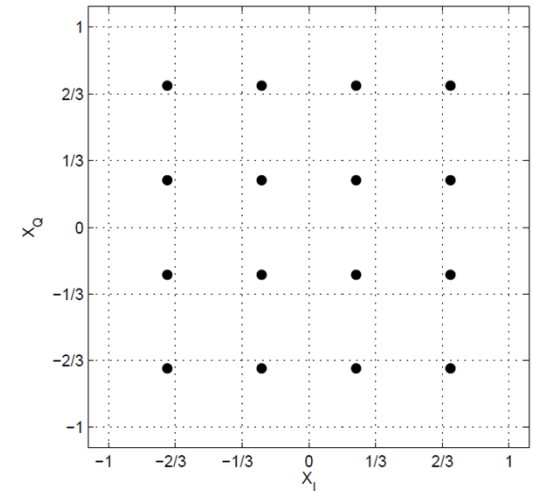
X_Q : 直交位相成分 (quadrature-phase)



(a) QPSK の点配置.



(b) 16PSK の点配置.



(c) 16QAM の点配置.

Figure: 代表的な変調方式の点配置.

⑥ AWGNにおいて、平均パワー制約下での通信路容量
 $\pi(x)$ を正規分布としたときに達成できる。 $\log(1+SNR)$

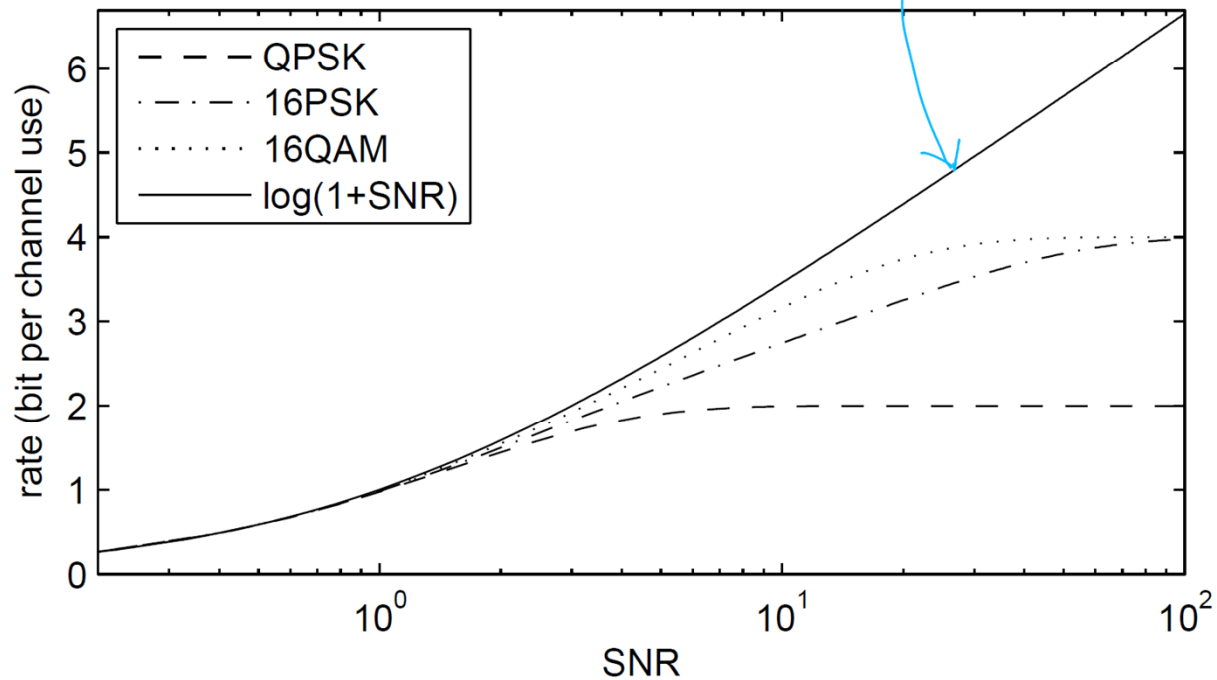


Figure: QPSK, 16PSK, 16QAM の達成可能レートと平均パワー制約下の通信路容量.

- 近年の技術により携帯端末では 適応変調 を用いることができる
- 適応変調 では 通信路の状態に応じて変調方式を変える

- どのような変調方式を用いるか
- どの時点で切り換えるか



- これまでは 詳細な議論は必ずしもしていない
- 平均パワー制約に基づく議論が主流

以下では AWGN ベクトル通信路を仮定し、現実的な制約の下で 詳細を検討する

② デジタル通信における制約

ハードウェアからくる制約 —— 平均出力制約ではない
最大出力制約の方が適切。

2つの最大出力制約

① ボックス制約

$$X_I^2 \leq E_{\max}/2, \quad X_Q^2 \leq E_{\max}/2$$



② 円制約

$$X_I^2 + X_Q^2 \leq E_{\max}$$



② ボックス制約,

X_1, X_2 軸をそれぞれ独立な1次元のAWGNとすればよい

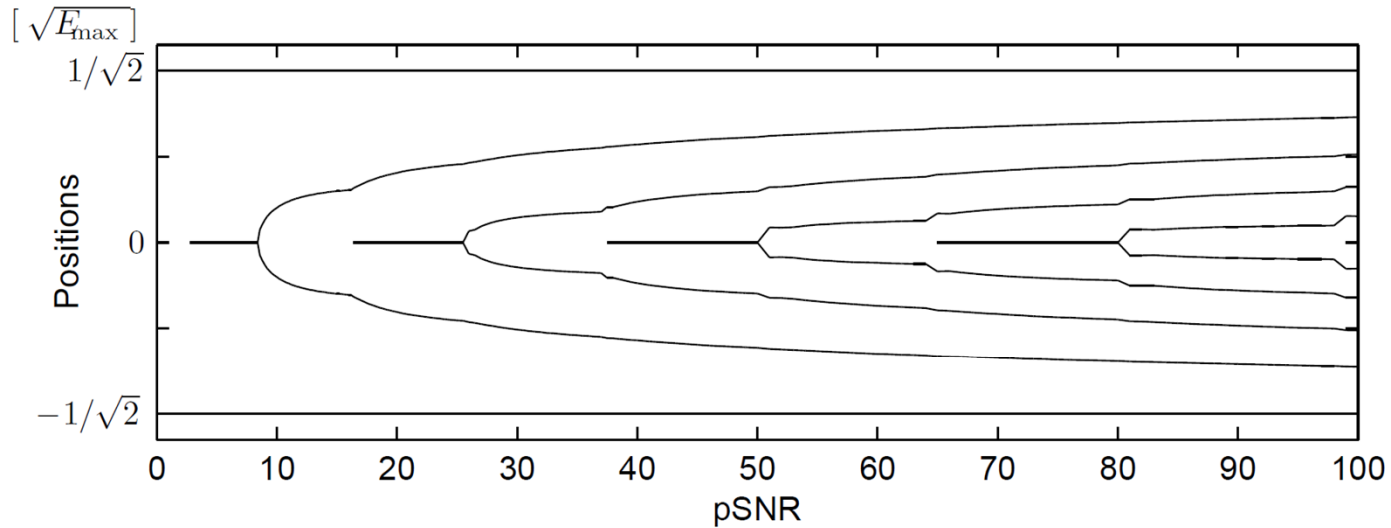
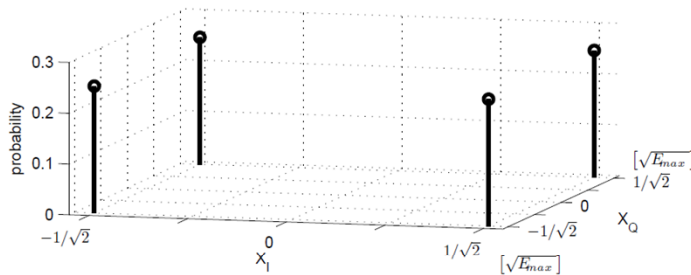
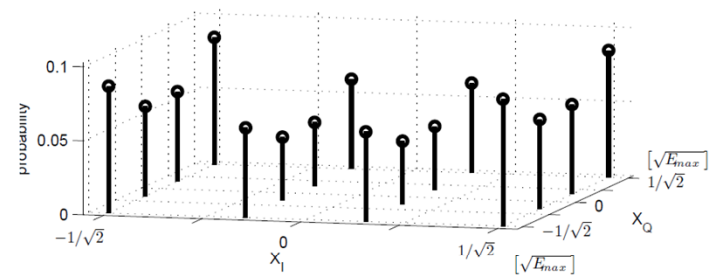


Figure: 1次元 AWGN 通信路における最大出力制約下の最適な入力分布の点の位置.

X_I, X_Q 軸の直積を考え、最適な分布を構成せよ



(a) $p\text{SNR} = 1$ のとき.



(b) $p\text{SNR} = 16$ のとき.

Figure: AWGN 複素通信路におけるボックス制約下の最適な入力分布.

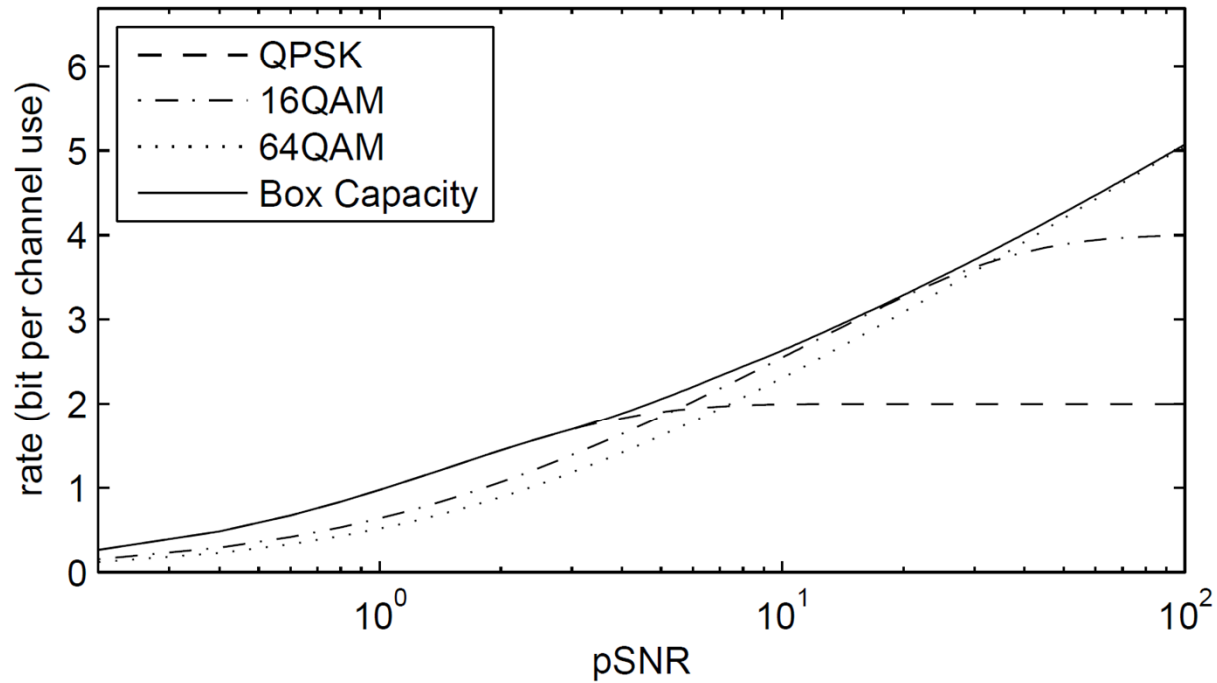


Figure: QPSK, 16QAM, 64QAM の達成可能レートとボックス制約下の通信路容量.

② 円制約.

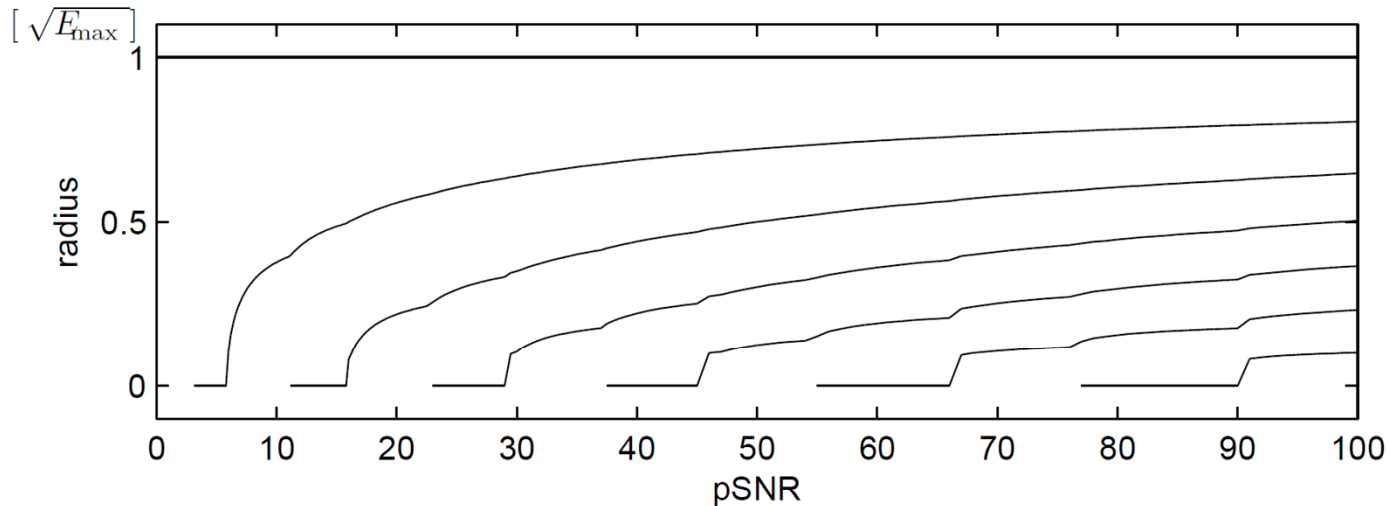
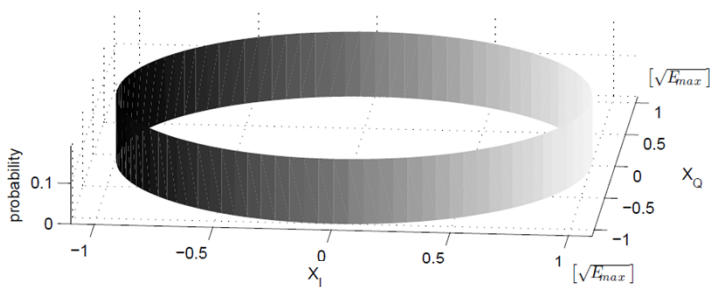
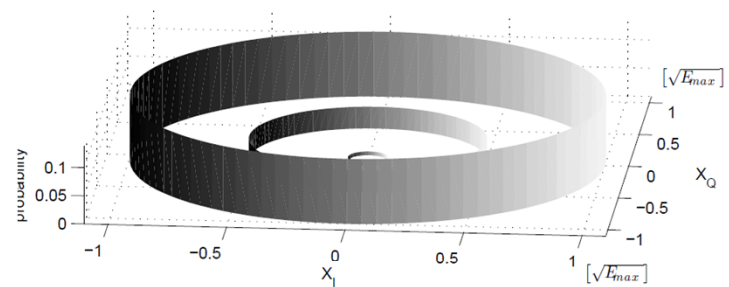


Figure: AWGN 複素通信路における円制約下の最適な入力分布の半径方向の点の位置.

円制約下ではAWGNの最適な入力分布は円対称な分布で、
(位相方向は一様分布) 半径方向には離散分布となることか示して
いる (Shamai (Shitz) & Bar-David, IEEE IT, 1995)



(a) $p\text{SNR} = 1$ のとき.



(b) $p\text{SNR} = 16$ のとき.

Figure: AWGN 複素通信路における円制約下の最適な入力分布.

最適分布

変調方式

①

(半径方向に複数の円
位相方向に一様分布)

⇒

(複数の振幅
PSK)

) → APSK

あまり使われていない

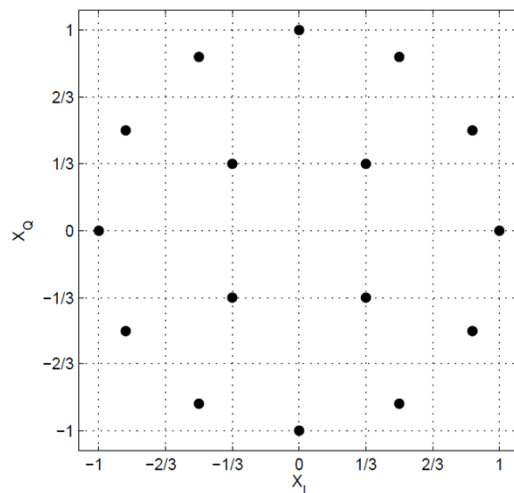


Figure: APSK の点配置.

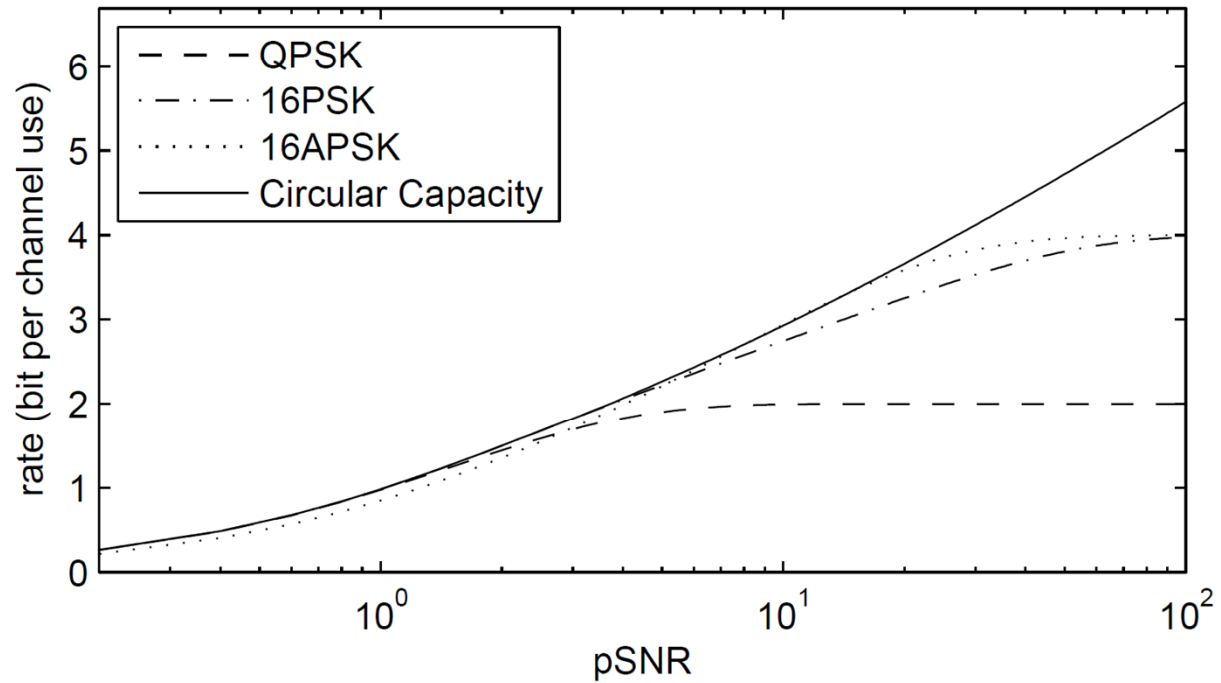


Figure: QPSK, 16PSK, 16APSK の達成可能レートと円制約下の通信路容量.

① はじめに

② 通信路容量の問題とこれまでの知見

③ 証明の手順

④ 我々の扱った問題

⑤ まとめ

まとめ

- ① 測度の最適化は基本的問題の中に存在する。
- ② 通信理論など、現実問題でも重要。