マーカーを用いずに対称情報レートに接近する同期誤り通信路の空間結合符号化法

笠井健太

東京工業大学

2017/8

研究の背景と目的

背景

- 高密度磁気記憶媒体 bit patterned media(BPM) では書き込み時に同期誤りの生じる可能性が指摘されている [1].
- Arnold らによって有限状態マルコフ通信路における対称情報レートの計算法が提案されている [2].

目的

Arnold らの方法を同期誤りの発生する通信路に適用し，対称情報レートを計算する.

同期誤り通信路

Table: 入力，出力，ドリフト及びイベントの例

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_t	0	1	0	0	1	0	1	0	1	
e_t	W	D	I	W	I	I	W	W	D	
d_t	0	0	-1	0	0	1	2	2	2	1
w_t	0	ε	00	0	11	00	1	0	ε	
r_t	1	ε	00	1	01	00	0	0	ε	

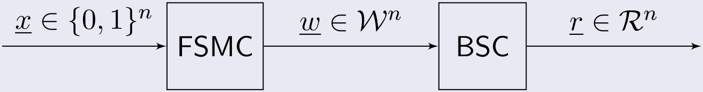
入力 $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n), x_t \in \{0, 1\}$

通信路状態，ドリフト $\underline{d} = (d_1, \ldots, d_{n+1}), d_t \in \mathcal{D} := \{-D, \ldots, +D\}$

書き込み $\underline{w} = (w_1, \ldots, w_n), w_t \in \mathcal{W} := \{\varepsilon, 0, 1, 00, 11\}$

出力 $\underline{r} = (r_1, \ldots, r_n), r_t \in \mathcal{R} := \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11\}$

通信路のブロック図



通信路 $p(\underline{r}|\underline{x})$ を有限状態マルコフ通信路 (FSMC)$p(\underline{w}|\underline{x})$ と二元対称通信路 (BSC)$p(\underline{r}|\underline{w})$ を結合した通信路と定義する．
有限状態マルコフ通信路は入力 $\underline{x}$，出力 $\underline{w}$ 及びドリフト $\underline{d}$ が

$$p(\underline{w},\underline{d}|\underline{x}) = p(d_1)\prod_{t=1}^{n} p(w_t, d_{t+1}|x_t, d_t)$$

を満たす通信路である．入力 x_t とドリフト d_t は独立なので，

$$p(w_t, d_{t+1}|x_t, d_t) = p(w_t|x_t, d_t, d_{t+1})p(d_{t+1}|d_t) \tag{1}$$

式 (1) の各項を与える

$$p(w_t|x_t, d_t, d_{t+1}) = \begin{cases} 1 & (d_{t+1} = d_t - 1, w_t = \varepsilon) & \text{削除} \\ 1 & (d_{t+1} = d_t, w_t = x_t) & \text{正常} \\ 1 & (d_{t+1} = d_t + 1, w_t = (x_t, x_t)) & \text{挿入} \\ 0 & (\text{otherwise}) & \end{cases}$$

ドリフト d_t は確率 p_{id} で次のように遷移する.

$$\begin{aligned} & p(d_{t+1}|d_t) \\ & = \begin{cases} 1 - p_{id} & (d_{t+1} = d_t) & \text{正常} \\ p_{id} & (d_{t+1} = d_t + 1, d_t = -D) & \text{挿入} \\ p_{id} & (d_{t+1} = d_t - 1, d_t = +D) & \text{削除} \\ p_{id}/2 & (d_{t+1} = d_t \pm 1, -D < d_t < +D) & \text{挿入, 削除} \\ 0 & (\text{otherwise}) & \end{cases} \end{aligned}$$

書き込み $\underline{w}$ の各ビットは独立に確率 p_s で反転し $\underline{r}$ を出力する.

対称情報レート

通信路容量を求めることが困難な通信路において，達成可能なレートの指標として対称情報レート (SIR:symmetric information rate) が用いられる．対称情報レートは一様独立な入力 X_1^n とその出力 R_1^n の相互情報量として以下のように定義される．

$$\mathrm{SIR} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} I(X_1, \ldots, X_n; R_1, \ldots, R_n)$$

対称情報レートの計算法 I

任意の有限状態マルコフ通信路において，入力 $\underline{x}$，出力 $\underline{r}$，状態 $\underline{d}$ は，

$$p(\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}) = p(d_1) \prod_{k=1}^{n} p(x_k, r_k, d_{k+1} | d_k)$$

を満たす．$\mu_1(d_1) := p(d_1)$ として以下のように $\log p(\underline{r})$ を計算する．ただし，λ_t はスケール因子であり，$\sum_{d_{t+1}} \mu_{t+1}(d_{t+1}) = 1$ となるように λ_t を選ぶ．

$$\mu_{t+1}(d_{t+1}) := \lambda_t \sum_{x_t \in \mathcal{X}} \sum_{d_t \in \mathcal{D}} \mu_t(d_t) p(x_t, r_t, d_{t+1} | d_t)$$

$$\log p(\underline{r}) = \sum_{t=1}^{n} \log \lambda_t$$

対称情報レートの計算法 II

$\log p(x^n, r^n)$ について，

$$\mu_{t+1}(d_{t+1}) := \lambda_t \sum_{d_t \in \mathcal{D}} \mu_t(d_t) p(x_t, r_t, d_{t+1} | d_t)$$

として，同様に計算する．入力 $\underline{x}$ は一様より，$-\frac{1}{n}\log p(\underline{x}) = 1$．以上より次のように対象情報レート (SIR) の近似を得る．

$$\mathrm{SIR} = -\frac{1}{n}\log p(\underline{x}) - \frac{1}{n}\log p(\underline{r}) + \frac{1}{n}\log p(\underline{x}, \underline{r}) + o_n(1)$$

しかし，受信器は出力系列 $\underline{r}$ のみを受け取り，時刻 t による区切りを知らない．すなわち時刻 t の出力 r_t の値を正確に知ることができない．

同期の回復

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_t	0	0	-1	0	0	1	2	2	2	1
w_t	0	ε	00	0	11	00	1	0	ε	

$\underline{r}$=1001010000

時刻 t における書き込み w_t とドリフト d_t が与えられると出力系列 $\underline{r}$ より，出力 r_t が

$$r_t = (\underline{r}^{(t+d_t)}, \ldots, \underline{r}^{(t+d_t+\ell(w_t)-1)})$$

で得られる．これを $r_t[w_t, d_t, \underline{r}]$ または簡単に $r_t[\cdot]$ と書く．
$r_t[\cdot]$ は w_t から各ビット独立に確率 p_s で反転する．これを $p(r_t[\cdot]|w_t, d_t)$ で表す．

同期誤り通信路における対象情報レートの計算

同期誤り通信路において，入力 $\underline{x}$，出力 $\underline{r}$，ドリフト $\underline{d}$ は以下を満たす.

$$
\begin{aligned}
p(\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}) &= p(d_1) \prod_{t=1}^{n} p(x_t, r_t, d_{t+1} | d_t) \\
p(x_t, r_t, d_{t+1} | d_t) &= p(x_t | d_t) p(r_t, d_{t+1} | x_t, d_t) \\
&= p(x_t | d_t) \sum_{w_t} p(r_t[\cdot], w_t, d_{t+1} | x_t, d_t) \\
&= p(x_t) \sum_{w_t \in \mathcal{W}} p(w_t, d_{t+1} | x_t, d_t) p(r_t[\cdot] | w_t, d_t)
\end{aligned}
$$

相互情報量の収束

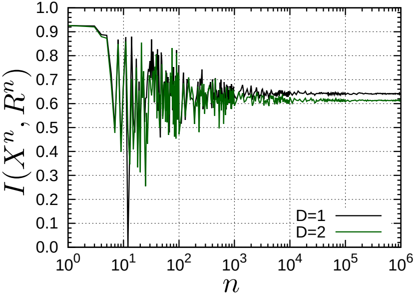


Figure: $D \in \{1, 2\}$，同期誤り確率 $p_{id} = 0.1$，反転確率 $p_s = 0.00$ としたときの相互情報量

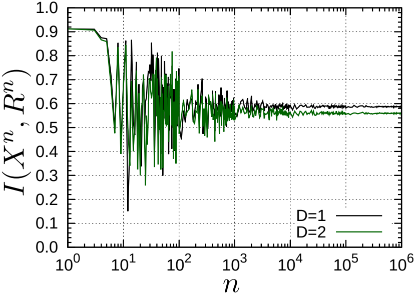


Figure: $D \in \{1, 2\}$，同期誤り確率 $p_{id} = 0.1$，反転確率 $p_s = 0.01$ としたときの相互情報量

本研究では長さ $n = 10^6$ として計算を行った.

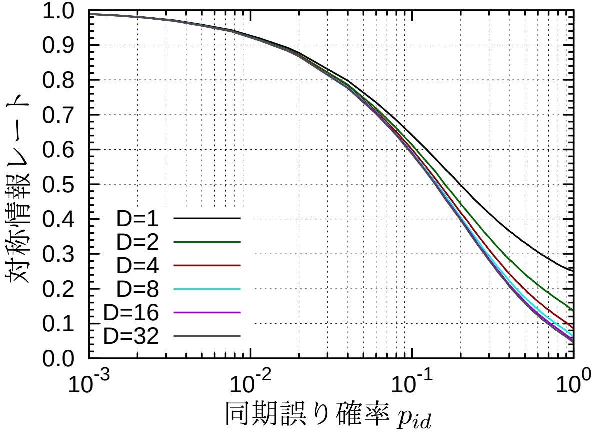


Figure: $D \in \{2^0, 2^1, \ldots, 2^5\}, p_s = 0.00$ としたときの対称情報レート

計算結果 II

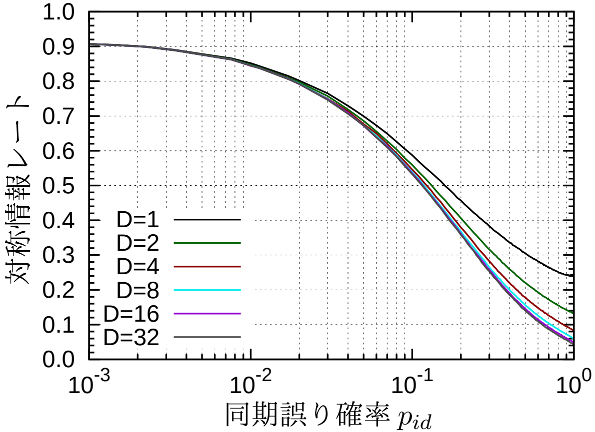


Figure: $D \in \{2^0, 2^1, \ldots, 2^5\}, p_s = 0.01$ としたときの対称情報レート

まとめ

同期誤りの発生する通信路について，同期誤りによって生じる入出力のずれに制限のあるモデルを考えた．このモデルに対して同期の回復方法を提案し，Arnold らの方法を適用した．計算の結果，この通信路の対称情報レートは大きい D の値で収束し，入出力に大きなずれが生じる場合でも達成可能な符号を構成できることがわかった．

参考文献 I

[1] S. Zhang, C. Kao-Siang, C. Kui, C. Bingjin, Q. Zhiliang, and F. Siang-Meng, "Write failure analysis for bit-patterned-media recording and its impact on read channel modeling," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 46, no. 6, pp. 1363–1365, 2010.

[2] D.-M. Arnold, H.-A. Loeliger, P. O. Vontobel, A. Kavcic, and W. Zeng, "Simulation-based computation of information rates for channels with memory." *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 52, no. 8, pp. 3498–3508, 2006.