



# 確率伝搬法による 多次元信号検出

大鐘武雄 西村寿彦 小川恭孝  
北海道大学 大学院情報科学研究科

2018/01/22

# はじめに

MIMOや等化など多くの信号を同時に推定する問題が多い

- ▶ 多次元信号検出
- ▶ 線形, 非線形, 様々な手法

確率伝搬法 (Belief Propagation) が応用可能

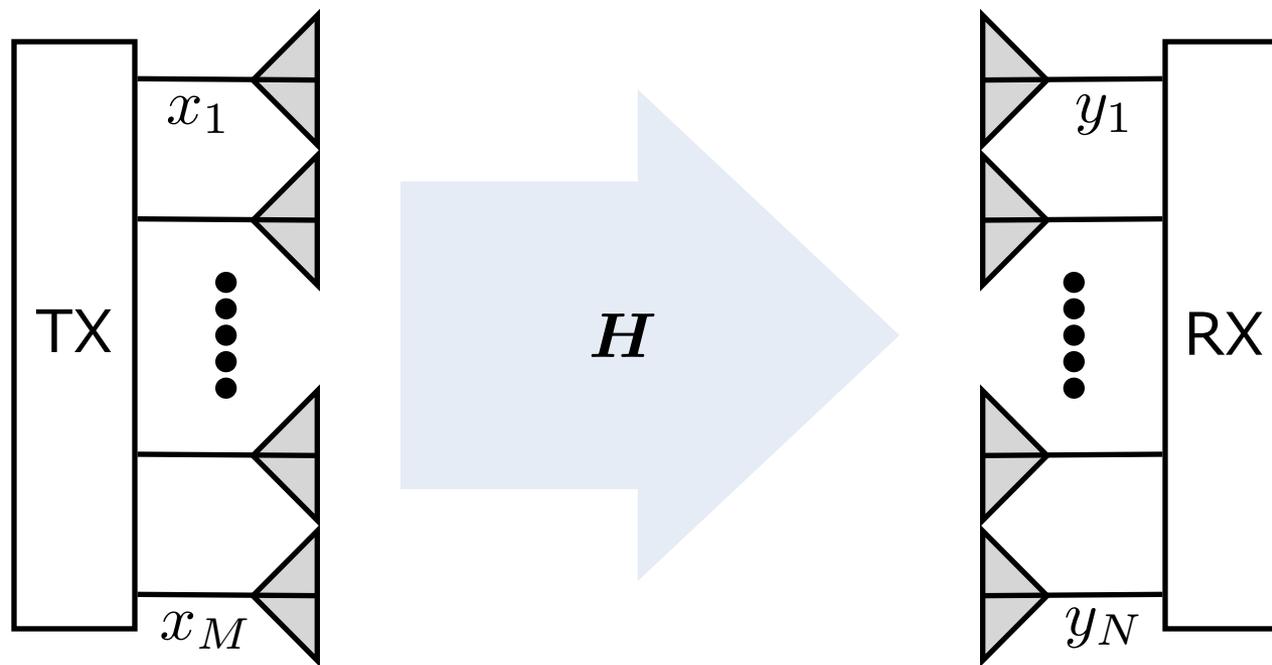
- ▶ CDMAでのマルチユーザ検出などの例\*
- ▶ 近年になって色々な問題に適用

手法と問題点に関して簡単に解説

Y. Kabashima, "A CDMA multiuser detection algorithm on the basis of belief propagation," J. Phys. A, vol. 36, pp. 11111-11121, Oct. 2003.



## 多次元信号検出の例 — MIMO信号検出

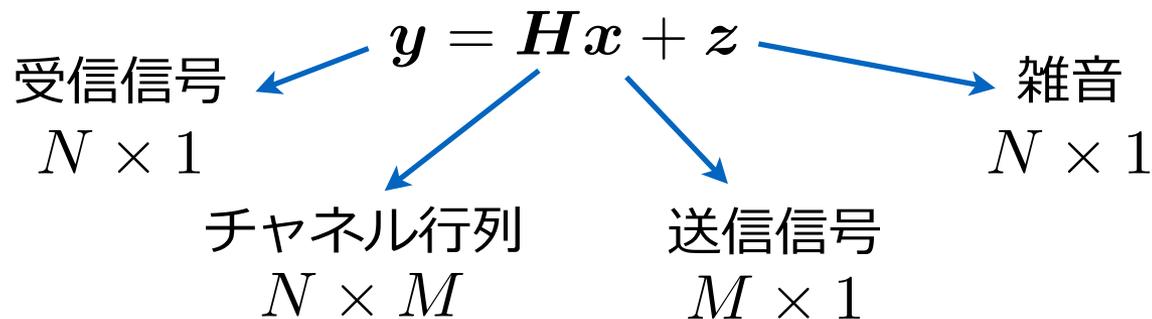


$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N1} & \cdots & h_{NM} \end{bmatrix}$$





# 多次元信号検出モデル



MAP (maximum a posteriori probability) 検出

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\hat{\mathbf{x}}}{\operatorname{argmax}} P(\hat{\mathbf{x}}|\mathbf{y}) \left( = \underset{\hat{\mathbf{x}}}{\operatorname{argmax}} \frac{p(\mathbf{y}|\hat{\mathbf{x}})P(\hat{\mathbf{x}})}{p(\mathbf{y})} \right)$$

ML (maximum likelihood) 検出

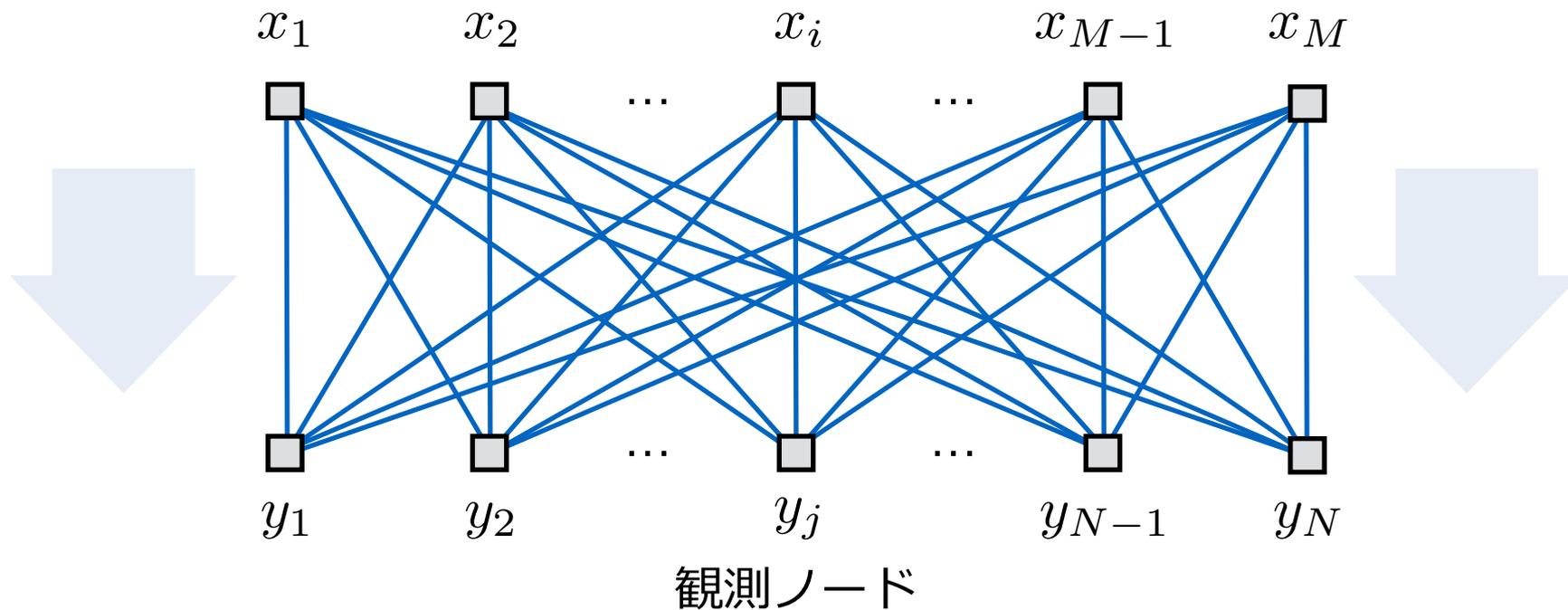
$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\hat{\mathbf{x}}}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{y}|\hat{\mathbf{x}}) = \underset{\hat{\mathbf{x}}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}\|^2$$

全探索 : MLD

部分探索 : Sphere Decoding, QRM-MLD



# 多次元信号伝送のグラフ表現



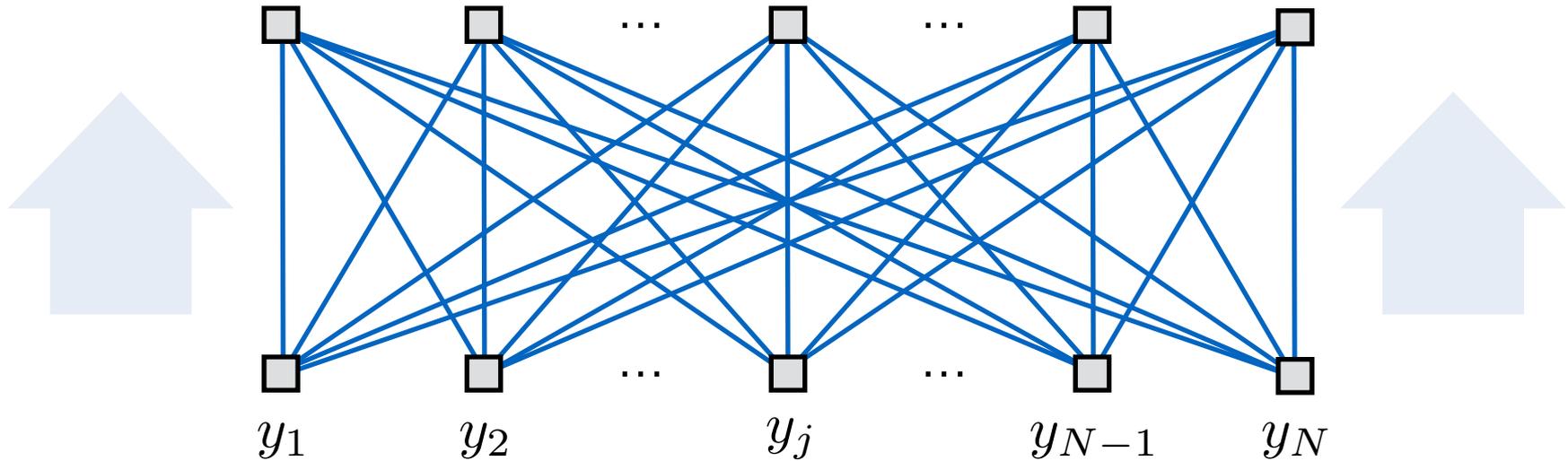
$$y_j = \sum_{i=1}^M h_{ji} x_i + z_j$$



# 多次元信号の推定問題 (ML検出)

変数ノード

$p(\mathbf{y}|x_1)$   $p(\mathbf{y}|x_2)$  ...  $p(\mathbf{y}|x_i)$  ...  $p(\mathbf{y}|x_{M-1})$   $p(\mathbf{y}|x_M)$



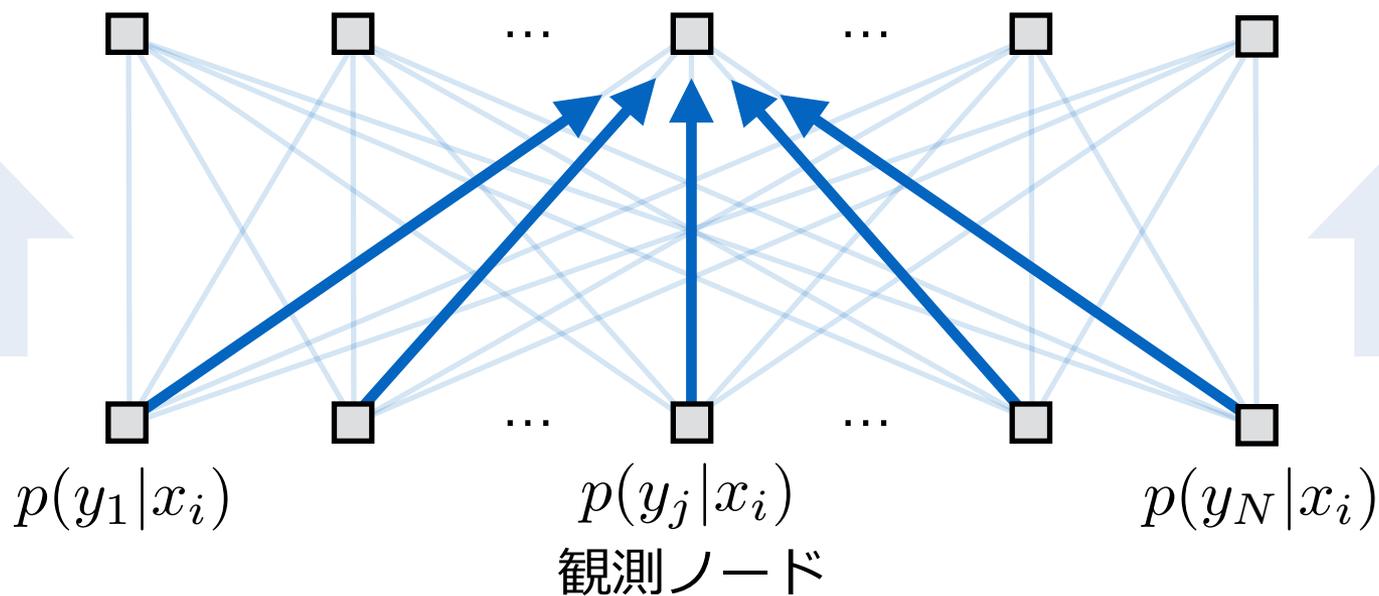
$$y_j = \sum_{i=1}^M h_{ji} x_i + z_j$$



# 変数ノードにおける推定

変数ノード

$$p(\mathbf{y}|x_i)$$



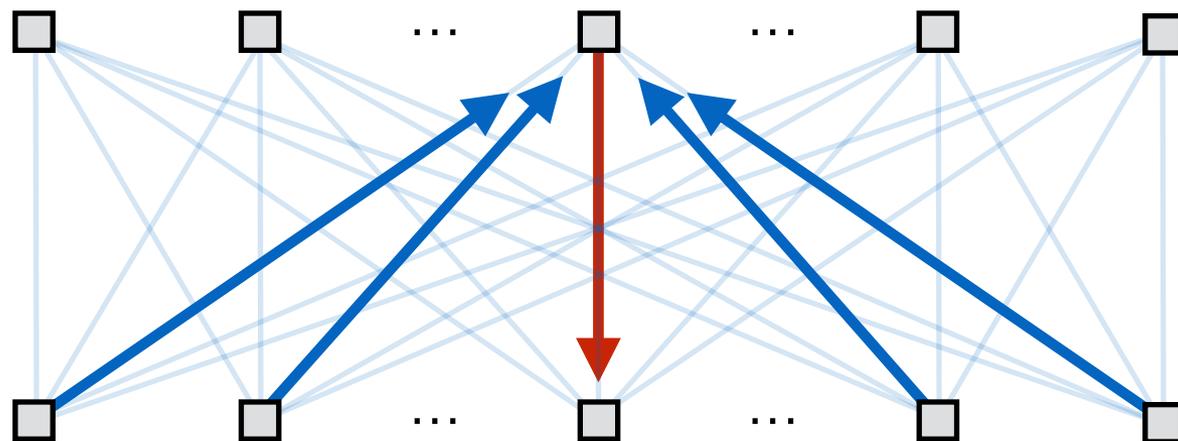
$$p(\mathbf{y}|x_i) = p(y_1, \dots, y_N|x_i) = \prod_{j=1}^N p(y_j|x_i)$$



# 変数ノードにおける推定（外部値の算出）

変数ノード

$$p(\mathbf{y}|x_i)/p(y_j|x_i) = p(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_N | x_i)$$



$$p(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_N | x_i)$$

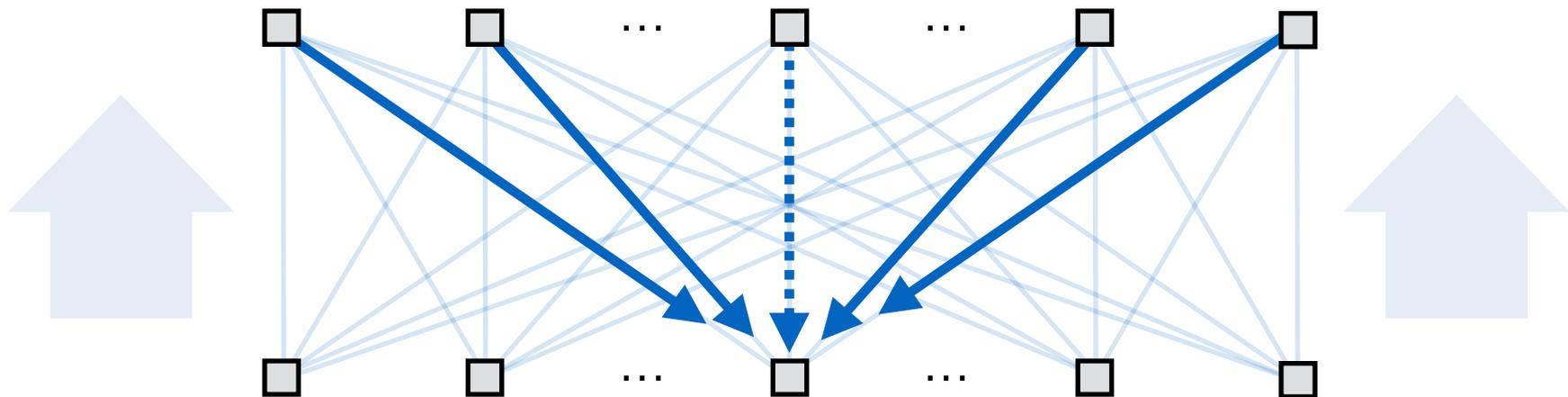
観測ノード



# 観測ノードにおける推定

変数ノード

$$p(\mathbf{y}|x_1)/p(y_j|x_1) \quad p(\mathbf{y}|x_i)/p(y_j|x_i) \quad p(\mathbf{y}|x_M)/p(y_j|x_M)$$



観測ノード

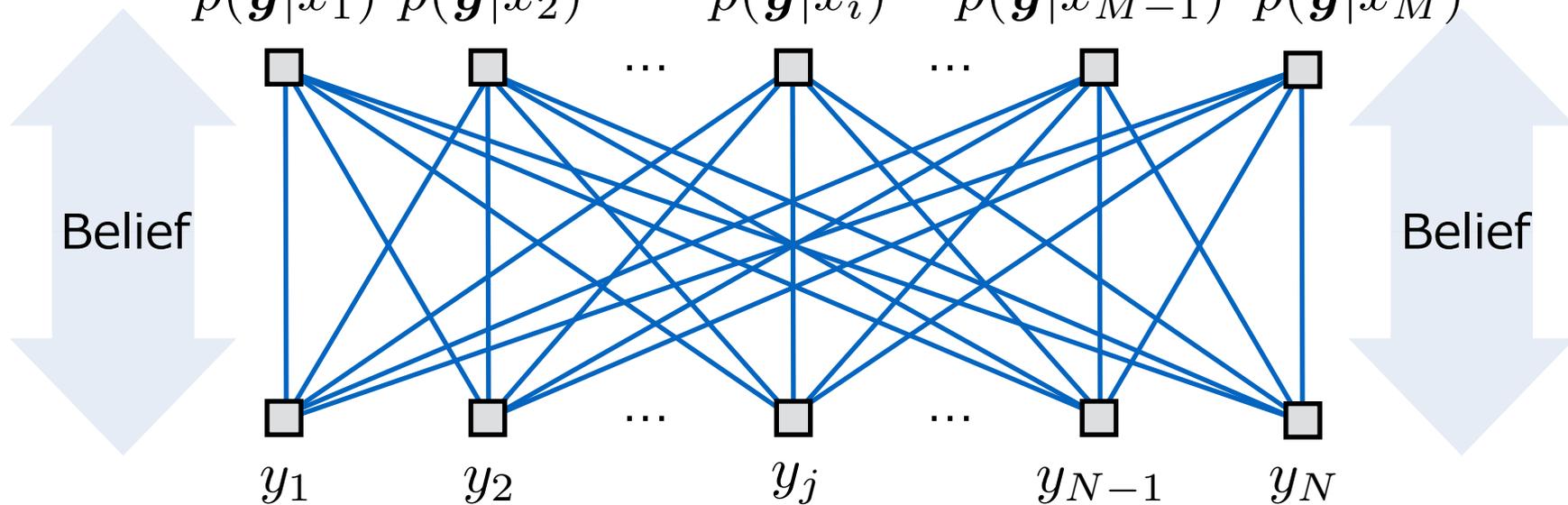
$$\begin{array}{l}
 y_j = \sum_{i=1}^M h_{ji}x_i + z_j \quad \rightarrow \quad p(y_j|\mathbf{x}) \\
 p(\mathbf{y}|x_k)/p(y_j|x_k) \quad \rightarrow \quad P(x_k) \quad (k \neq i)
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} y_j = \sum_{i=1}^M h_{ji}x_i + z_j \\ p(\mathbf{y}|x_k)/p(y_j|x_k) \end{array}} \right\} p(y_j|x_i)$$



# 確率伝搬法 (Belief Propagation: BP)

変数ノード

$p(\mathbf{y}|x_1)$   $p(\mathbf{y}|x_2)$  ...  $p(\mathbf{y}|x_i)$  ...  $p(\mathbf{y}|x_{M-1})$   $p(\mathbf{y}|x_M)$



観測ノード

$$y_j = \sum_{i=1}^M h_{ji} x_i + z_j$$



# 変数ノード処理の省計算量化

$$p(\mathbf{y}|x_i) = \prod_{j=1}^N p(y_j|x_i)$$



$$\log p(\mathbf{y}|x_i) = \sum_{j=1}^N \log p(y_j|x_i)$$

対数領域だと加算のみでOK

(log Likelihood Ratio: LLRがBeliefとして適している)

$$\left( \text{BPSK: } \text{LLR}_{x_i} = \log \frac{p(y_j|x_i = 1)}{p(y_j|x_i = -1)} \right)$$

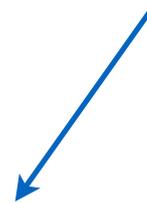


# 観測ノード処理の問題：周辺化

$$y_j = \sum_{i=1}^M h_{ji} x_i + z_j \quad \rightarrow \quad p(y_j | \mathbf{x})$$

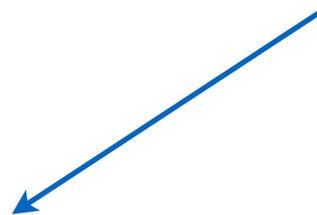
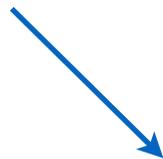


$$p(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_N | x_1)$$



$$p(y_j | x_i)$$

$$= \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_{i-1}} \sum_{x_{i+1}} \cdots \sum_{x_M} p(y_j | \mathbf{x}) P(x_1) \cdots P(x_{i-1}) P(x_{i+1}) \cdots P(x_M)$$



周辺化（ただし，M-1乗のオーダー！）



# 周辺化の具体例（2つのBPSK信号の場合）

$$y_j = h_{j1}x_1 + h_{j2}x_2 + z_j$$



$$\begin{aligned} p(y_j | x_1 = 1) &= p(y_j | x_1 = 1, x_2 = 1)P(x_2 = 1) \\ &\quad + p(y_j | x_1 = 1, x_2 = -1)P(x_2 = -1) \\ &= \frac{1}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{|y_j - h_{j1} - h_{j2}|^2}{\sigma^2}\right) P(x_2 = 1) \\ &\quad + \frac{1}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{|y_j - h_{j1} + h_{j2}|^2}{\sigma^2}\right) P(x_2 = -1) \end{aligned}$$

複素ガウス雑音電力



# 検出対象外信号のガウス近似

$$y_j - h_{ji}x_i = \sum_{m=1, m \neq i}^M h_{jm}x_m + z_j = z'_{ji}$$

ガウス雑音と近似

検出対象

$$p(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_N | x_m)$$

$$\text{平均値 } \mu_{ji} = E[z'_{ji}] = \sum_{m=1, m \neq i}^M h_{jm} \hat{x}_m$$

Beliefから  
干渉レプリカ生成

$$\text{分散 } c_{ji} = E[|z'_{ji} - \mu_{ji}|^2] = \sum_{m=1, m \neq i}^M |h_{jm}|^2 E[|x_m - \hat{x}_m|^2] + \sigma^2$$

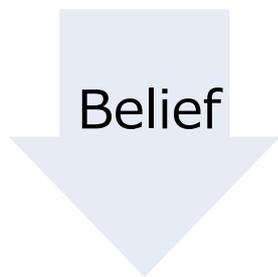
残留干渉電力

$$p(y_j | x_i) = p(y_j - h_{ji}x_i) = \frac{1}{\pi c_{ji}} \exp\left(-\frac{|y_j - h_{ji}x_i - \mu_{ji}|^2}{c_{ji}}\right)$$

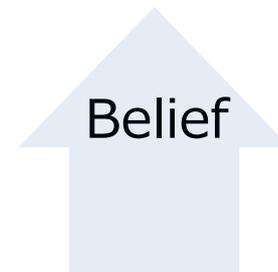


# GaBP (Gaussian BP) の変数ノード更新

$$\log \frac{p(\mathbf{y}|x_1 = 1)}{p(\mathbf{y}|x_1 = -1)} = \sum_{j=1}^N \log \frac{p(y_j|x_i = 1)}{p(y_j|x_i = -1)}$$



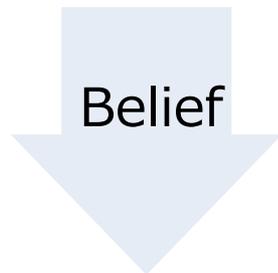
$$\begin{aligned} & \log \frac{p(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_N | x_i = 1)}{p(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_N | x_i = -1)} \\ &= \log \frac{p(\mathbf{y}|x_i = 1)}{p(\mathbf{y}|x_i = -1)} - \log \frac{p(y_j|x_i = 1)}{p(y_j|x_i = -1)} \end{aligned}$$



$$\log \frac{p(y_j|x_i = 1)}{p(y_j|x_i = -1)}$$



# GaBP (Gaussian BP) の観測ノードでの処理



$$\log \frac{p(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_N | x_i = 1)}{p(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_N | x_i = -1)}$$

$$= \text{LLR}_{y_j \leftarrow x_i}$$

ここで  $P(x_i) \propto p(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_N | x_i)$  とすると



$$\log \frac{P(x_i = 1)}{P(x_i = -1)} = \text{LLR}_{y_j \leftarrow x_i}$$

$$P(x_i = 1) = P(x_i = -1) e^{\text{LLR}_{y_j \leftarrow x_i}}$$



# 変数ノードへのBelief生成

$$P(x_i = 1) = P(x_i = -1)e^{\text{LLR}_{y_j \leftarrow x_i}}$$

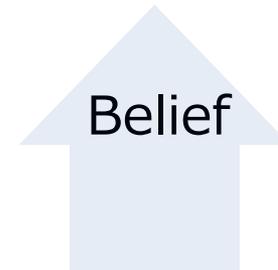
$$P(x_i = 1) + P(x_i = -1) = 1 \quad \text{より}$$



$$\begin{aligned} \hat{x}_i|_{y_j} &= 1 \cdot P(x_i = 1) \\ &\quad + (-1) \cdot P(x_i = -1) \\ &= \frac{e^{\text{LLR}_{y_j \leftarrow x_i}} - 1}{e^{\text{LLR}_{y_j \leftarrow x_i}} + 1} \\ &= \tanh(\text{LLR}_{y_j \leftarrow x_i} / 2) \end{aligned}$$



検出対象外の信号成分をガウス雑音と近似して，平均値と分散を計算



$$\begin{aligned} &\log \frac{p(y_j | x_i = 1)}{p(y_j | x_i = -1)} \\ &= |y_j - h_{ji} - \mu_{ji}|^2 / c_{ji} \\ &\quad - |y_j + h_{ji} - \mu_{ji}|^2 / c_{ji} \end{aligned}$$



# GaBP (Gaussian BP) のまとめ

LLR合計

$$\log \frac{p(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_N | x_i = 1)}{p(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_N | x_i = -1)}$$

Belief

Belief

$$\log \frac{p(y_j | x_i = 1)}{p(y_j | x_i = -1)}$$

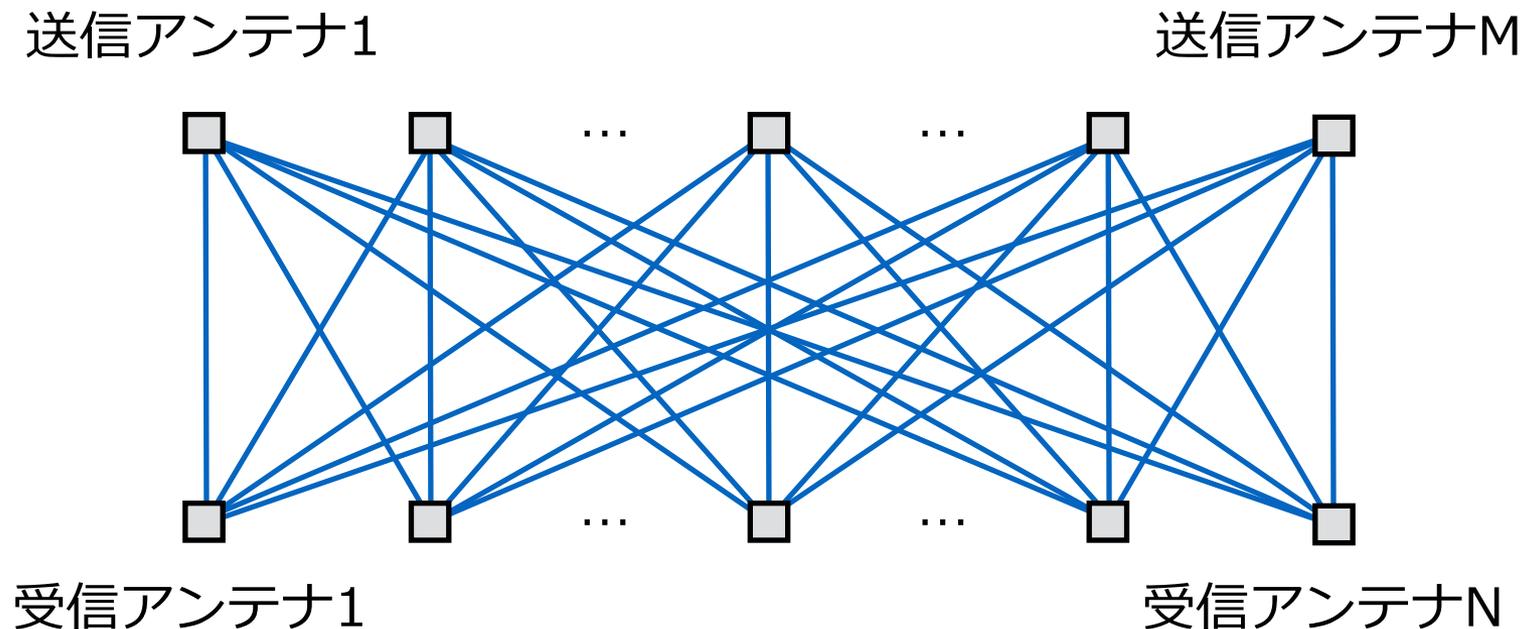
干渉除去 & LLR算出

N個のノードでO(MN))



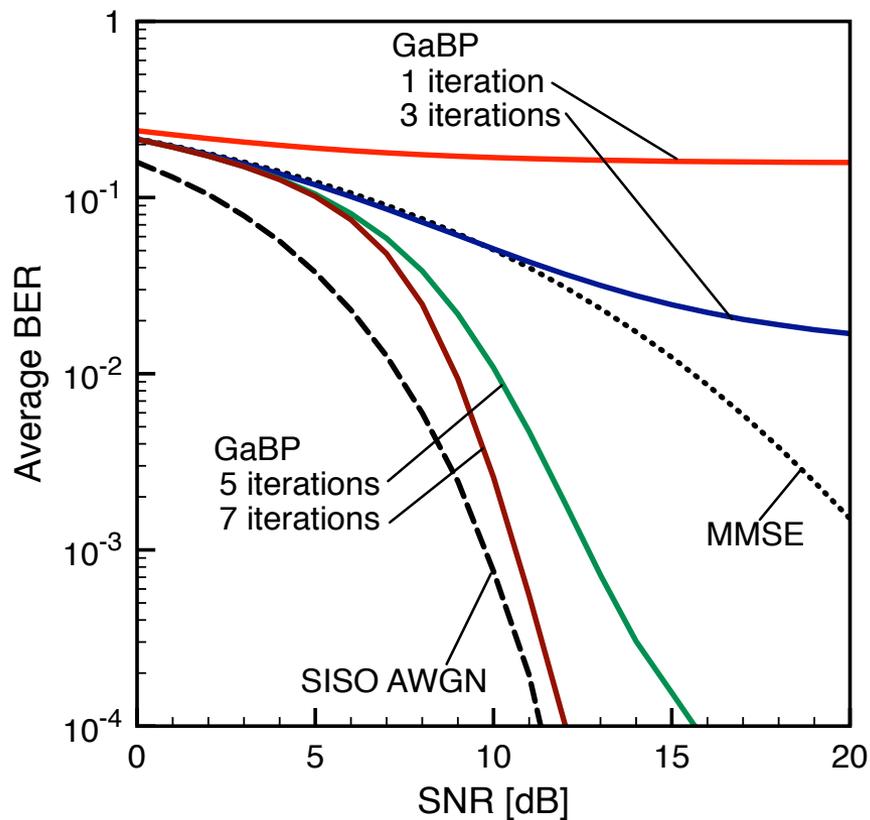
# MIMO信号検出の例 (ファクターグラフ)

- ▶ ファクターグラフ上のノード間すべてにエッジが存在

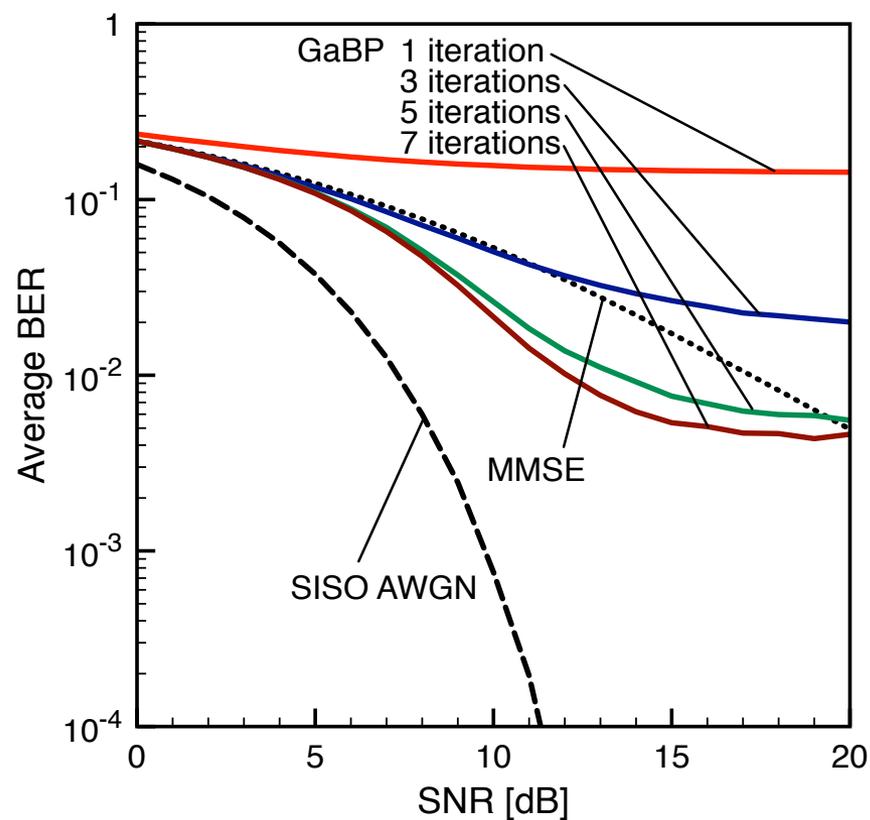


# MIMO信号検出の例

- ▶ 100 x 100 は良好に動作. しかし...



100 x 100, Uncoded



10 x 10, Uncoded

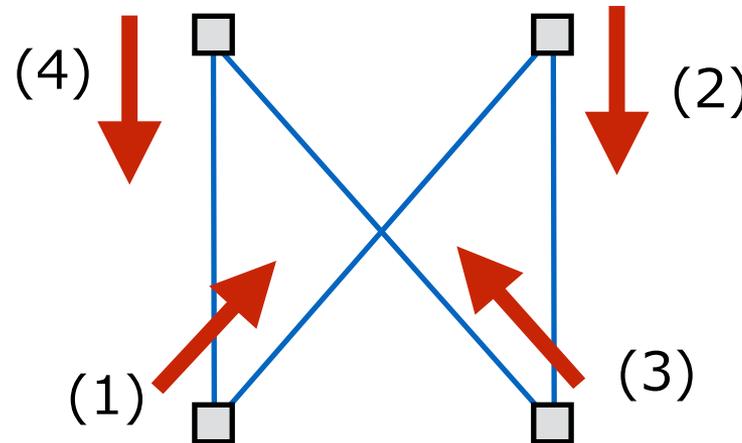


# ループの影響：外れ値の発振？

(4)  $\Sigma$ LLRが複数の  
外れ値で増幅

(2)  $\Sigma$ LLRが外れ値でマスクされ、  
そのまま伝搬

他の情報が少ない  
場合に顕著



(1) たまたま誤ったLLRが生成  
しかも極めて大きな値：外れ値

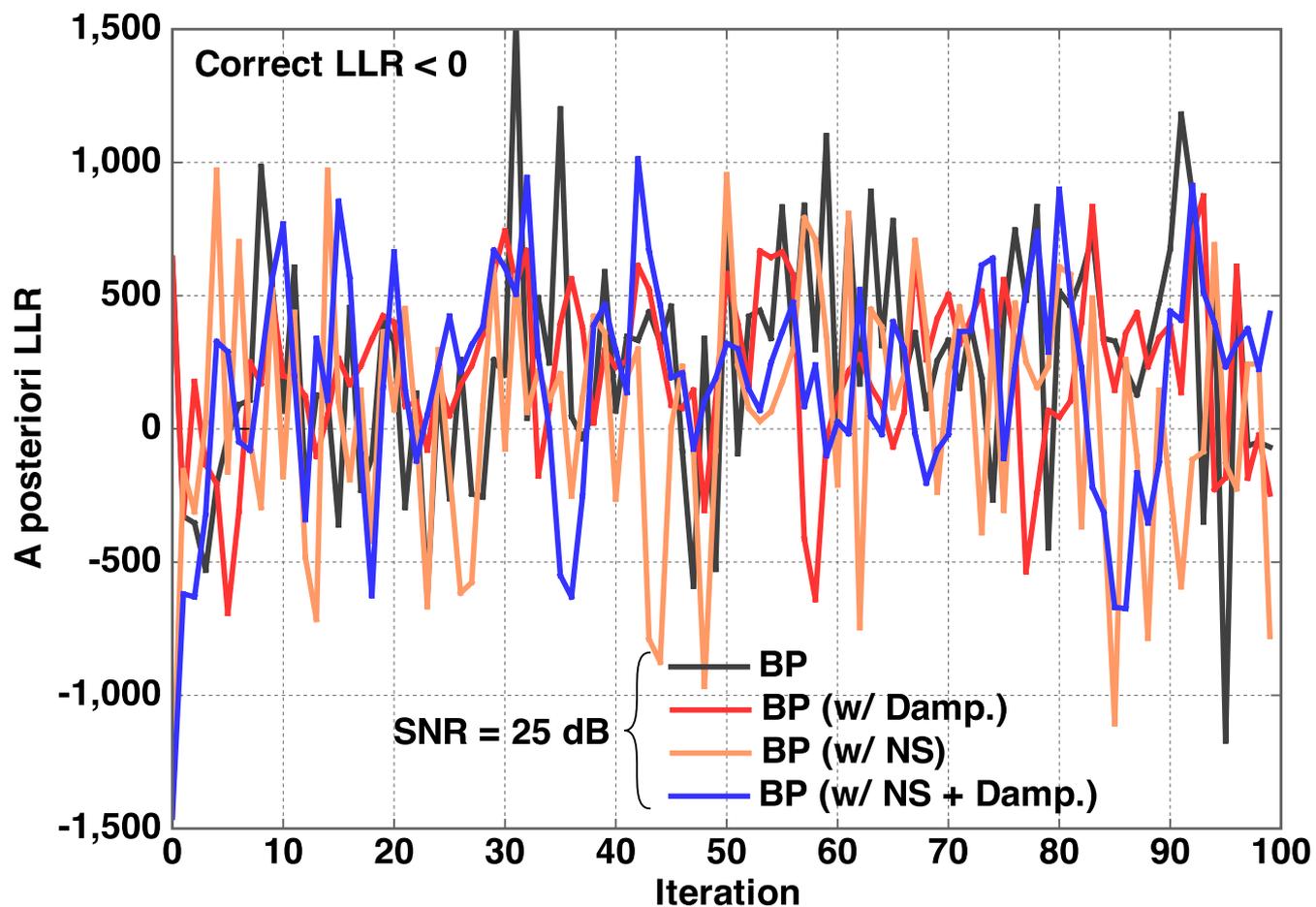
(3) 外れ値をもとにしたLLR推定  
により外れ値が生成

(5) さらに極めて大きな値



# LLR発振例 (ブロック等化, 無符号化)

144シンボル  
ブロック  
16パス  
Uncoded

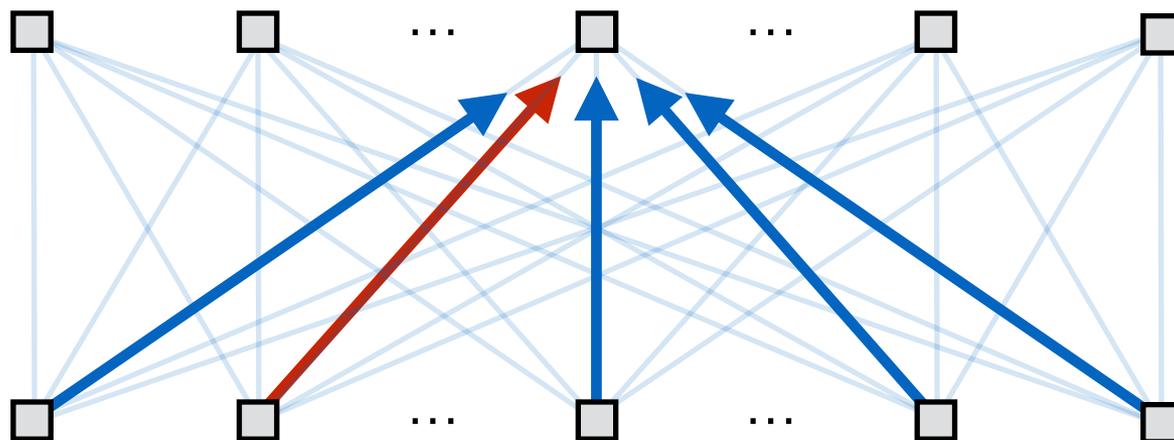


M. Hagiwara, T. Nishimura, T. Ohgane, and Y. Ogawa, "Node Selection for Belief Propagation Based Channel Equalization," *IEICE Trans. Commun.*, vol. E100-B, no. 8, pp. 1285–1292, 2017.



# 外れ値の影響を低減化するには????

- ・ 多数のLLRで平均化



- ・ LLRを調整
- ・ 用いるノードを選択



# 制振と上限設定

- ▶ 外れ値が発振する例が多いので，制振

$$\text{LLR}^{(k)} = (1 - D) \cdot \text{LLR}^{(\text{present})} + D \cdot \text{LLR}^{(k-1)}$$

- ▶ 外れ値の大きさそのものを制限：上限設定

$$\text{LLR}^{(k)} = \max(\text{LLR}^{(\text{present})}, \text{LLR}_{\max})$$

P. Som and A. Chockalingam, "Damped Belief Propagation Based Near-Optimal Equalization of Severely Delay-Spread UWB MIMO-ISI Channels," Proc. IEEE ICC 2010, May 2010.

M. Hagiwara, T. Nishimura, T. Ohgane, and Y. Ogawa, "Node Selection for Belief Propagation Based Channel Equalization," IEICE Trans. Commun., vol. E100-B, no. 8, pp. 1285–1292, 2017.



## レプリカ生成時LLR正規化

$a=2$ のときの  
レプリカ範囲

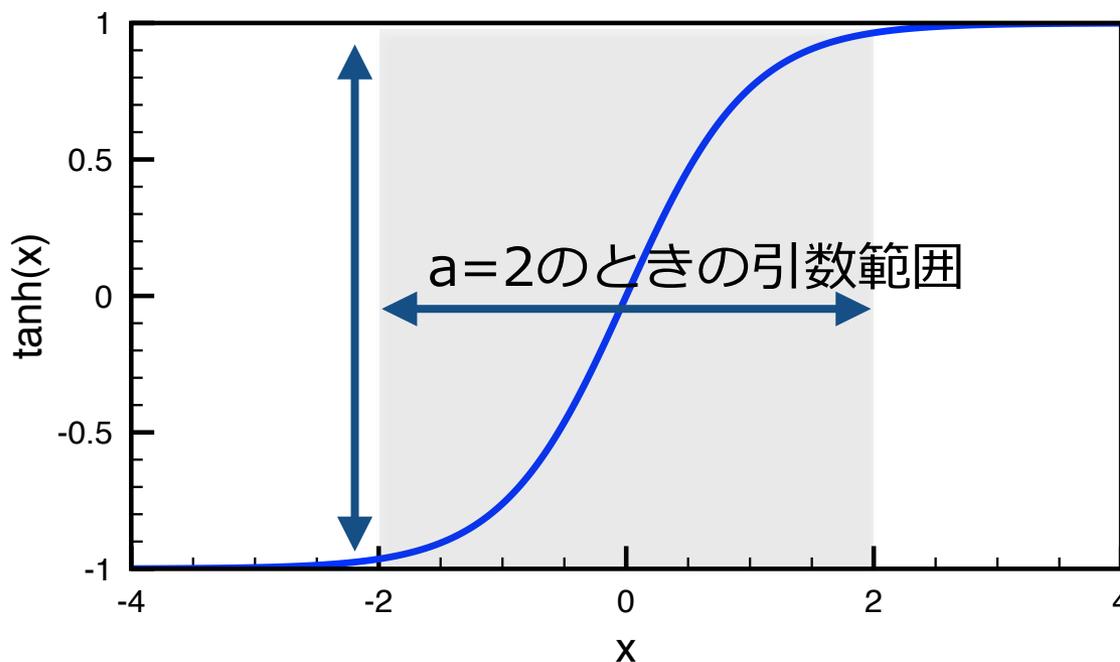
$$\tanh\left(\frac{\text{LLR}}{2}\right)$$



$$\tanh\left(\frac{a}{w} \frac{\text{LLR}}{2}\right)$$

調整係数

LLRの等価利得係数  
(正規化のためのLLR期待値)



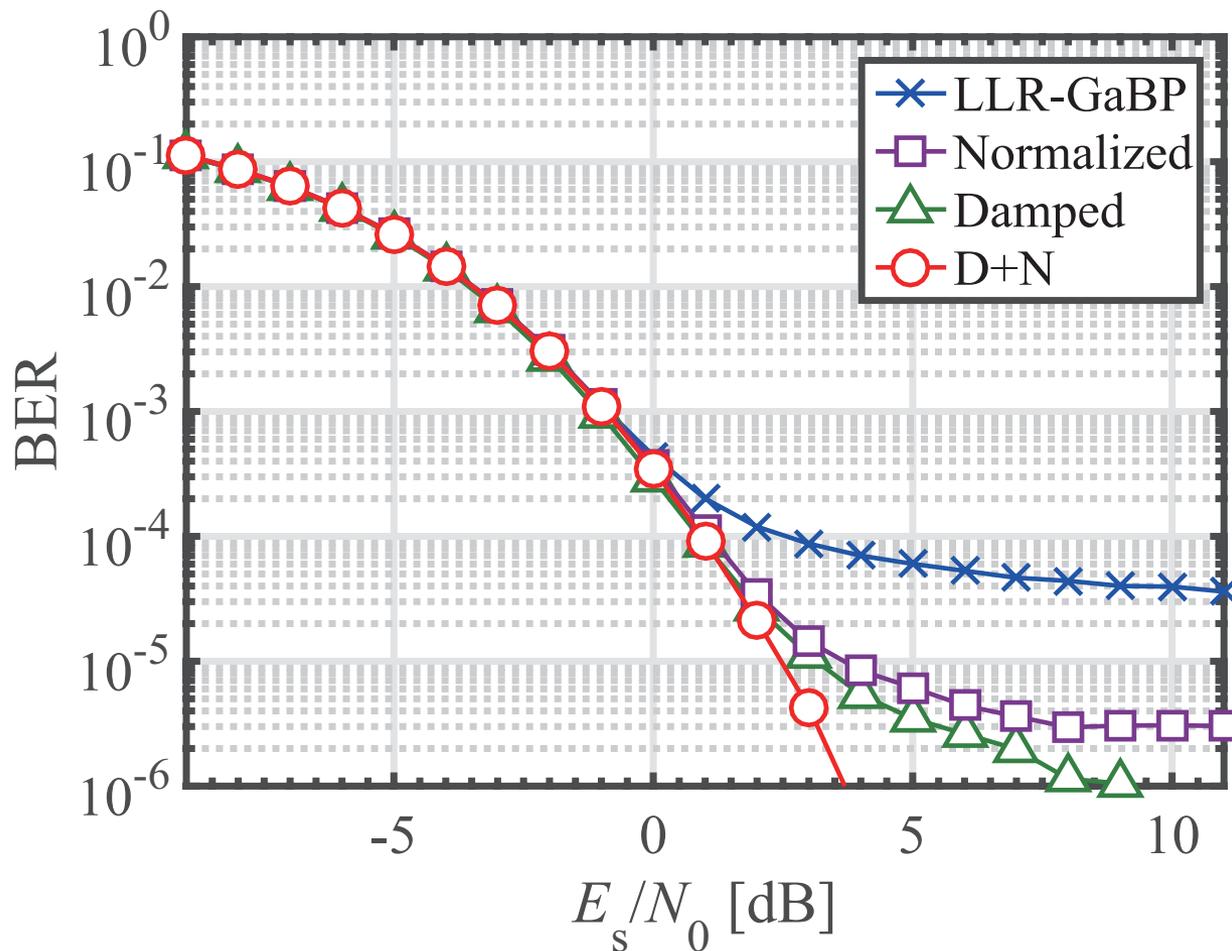
正規化と調整によりレプリカ  
が $\pm 1$ に張り付かない!  
(傾斜制御)

T. Takahashi, S. Ibi, and S. Sampei, "On normalization of matched filter belief in GaBP for large MIMO detection," Proc. VTC 2016-Fall, 2016.



# LLR正規化の特性

16 x 8  
Uncoded



T. Takahashi, S. Ibi, and S. Sampei, "On normalization of matched filter belief in GaBP for large MIMO detection," Proc. VTC 2016-Fall, 2016.



# 確率伝搬法から信念伝搬法へ

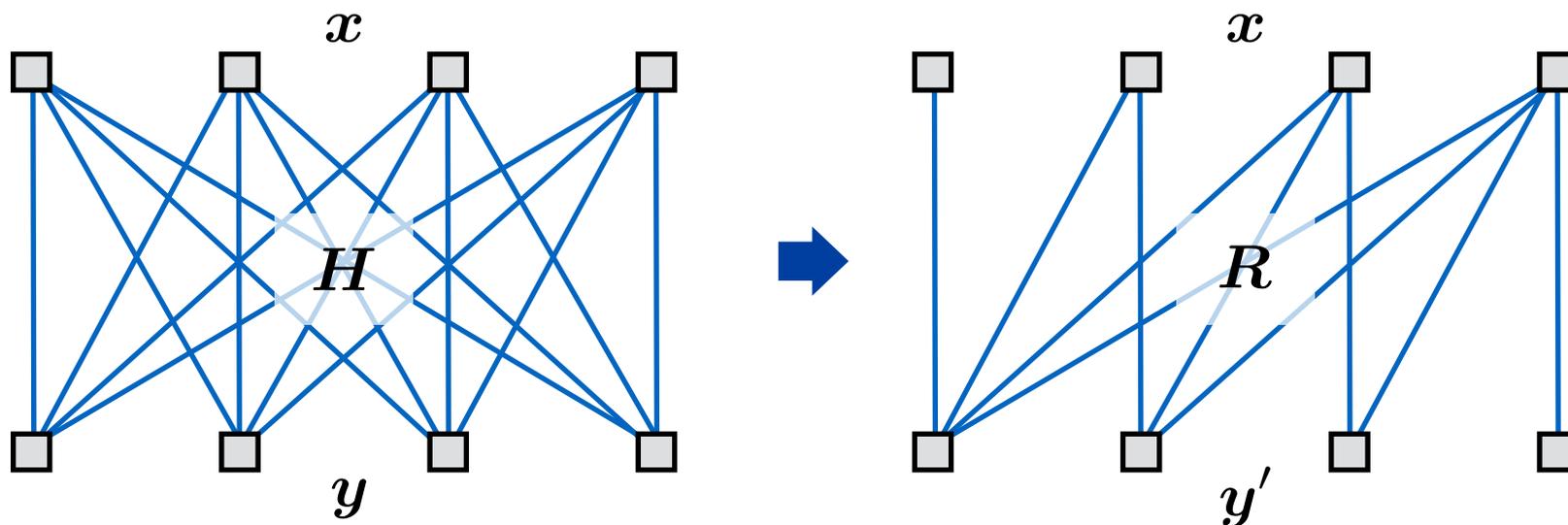
- ▶ 伝搬していたLLR（確率に基づく値）を調整  
（制振・上限設定・正規化）
- ▶ 変化させたことで、正しいLLRから「LLRのようなもの」に変化
- ▶ Beliefは確率でなくてもよいのでは？
  - » 確率伝搬法から信念伝搬法と呼ぶべきか？
  - » どんなBeliefがよいか今後の検討課題



# ループ対策：三角化

- ▶ 外れ値伝搬はそもそもループが原因
- ▶ ループを削減する手法の一つに三角化

$$H = QR \quad \rightarrow \quad y' = Q^H y = Rx + Q^H z$$

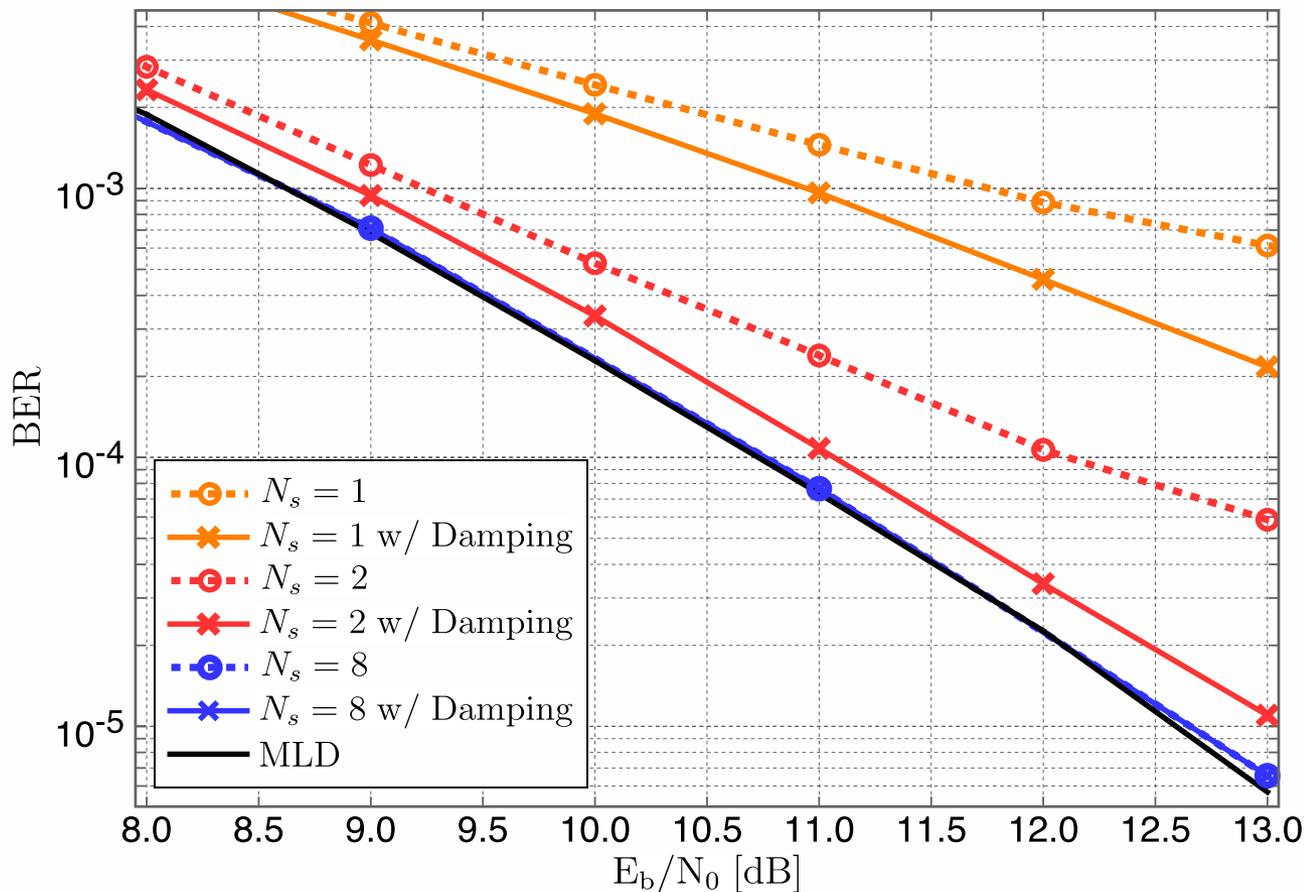


三角化によりループ減少



# 三角化後BP（部分周辺化あり）の特性

8 x 8  
Uncoded  
周辺化数 $N_s$

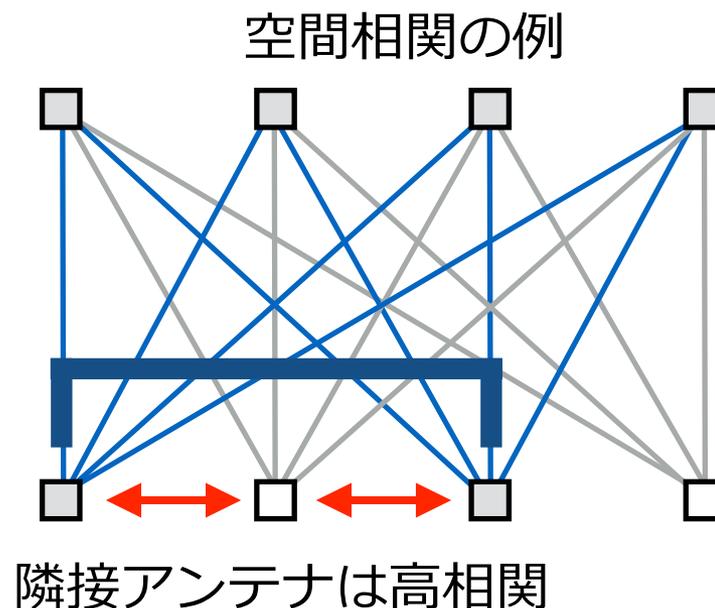
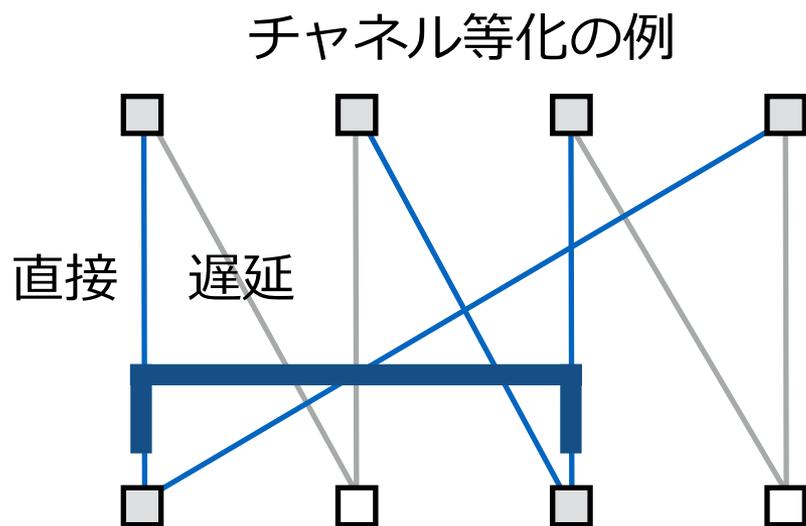


S. Tanabe, A. Shigyo, and Koji Ishibashi, "Not-so-large MIMO signal detection based on damped QR-decomposed belief propagation," Proc. ISITA 2016, pp. 463–467, 2016.



# ノード選択

- ▶ 外れ値発生リスクを抑えるため，適切なノードから順に更新
- ▶ 観測ノードの選択例
  - » MIMOで相関がある場合，相関が高いノードは同時に更新しない
  - » 適応等化の場合，最大遅延内のノードは同時に更新しない

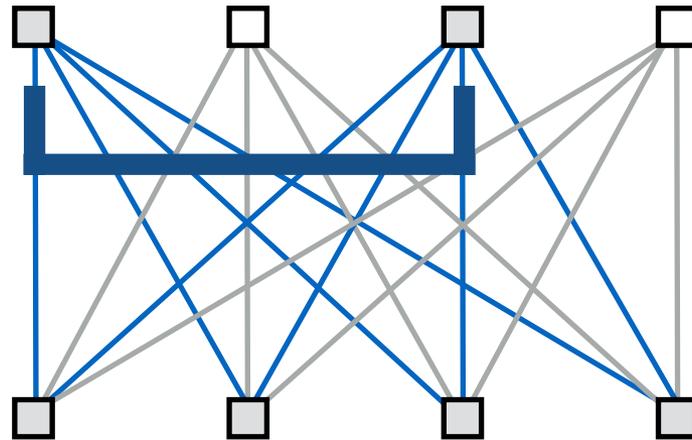


# ノード選択つづき

## ▶ 変数ノードの選択例

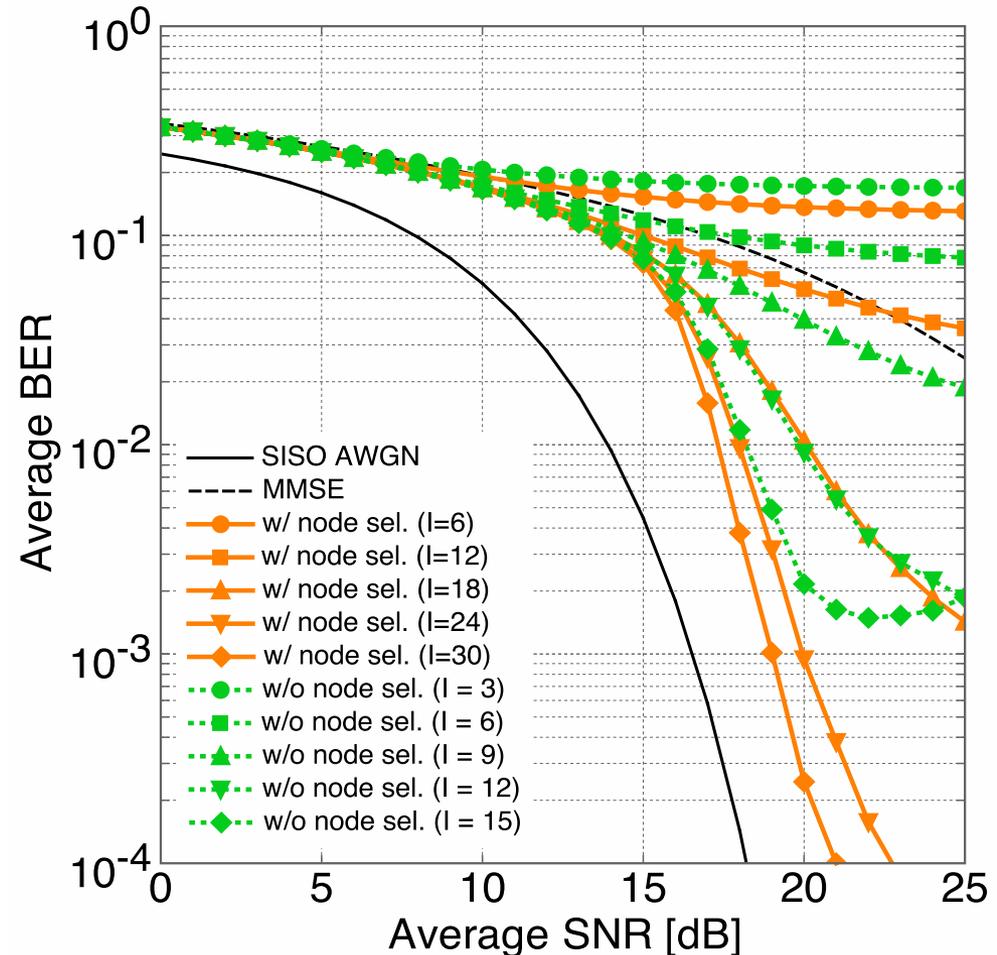
» 誤り耐性に差がある多値変調などは耐性の強いノードから更新

耐性大 耐性小



# ノード選択 (多値変調の例)

100 x 100  
16 QAM  
Uncoded

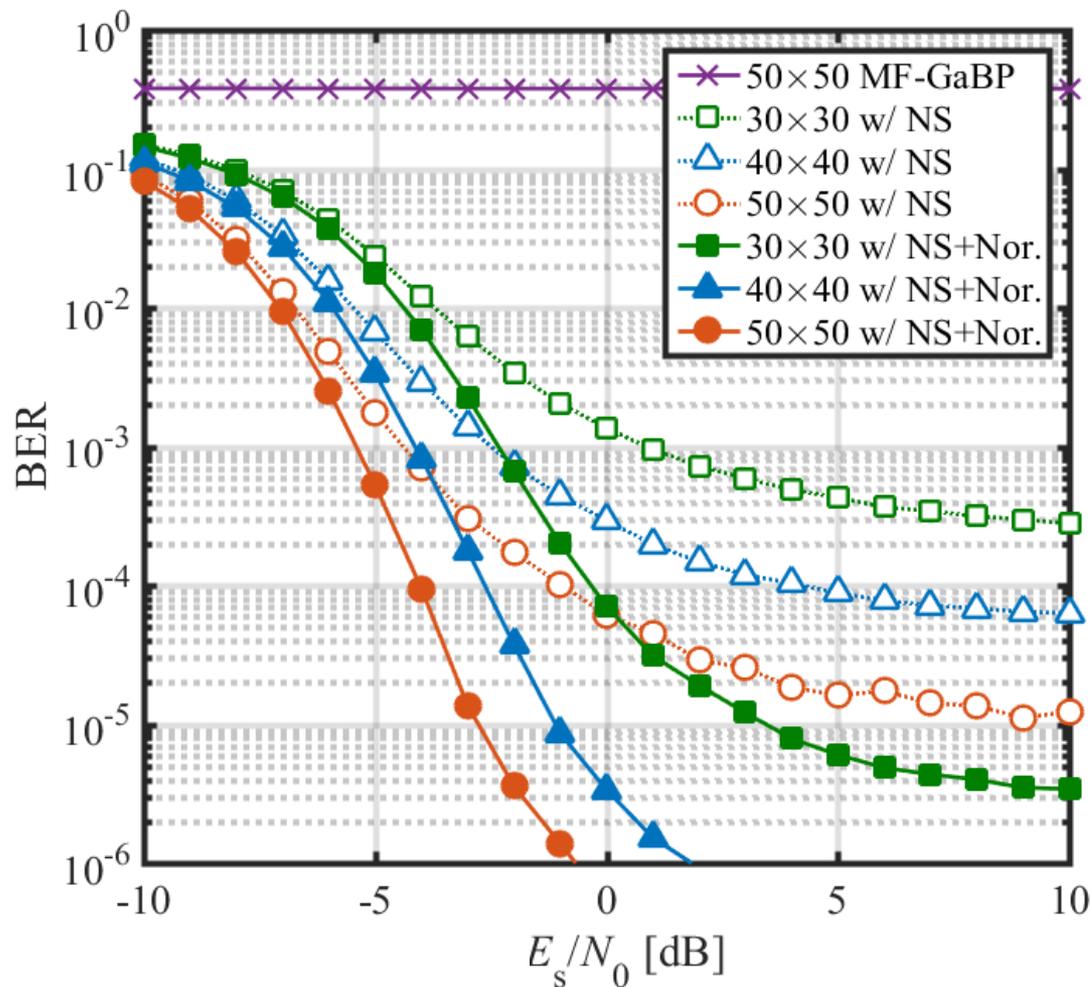


T. Usami, T. Nishimura, T. Ohgane and Y. Ogawa, "BP-based Detection of Spatially Multiplexed 16-QAM Signals in a Fully Massive MIMO System," Proc. ICNC 2016, Workshop on CNC, pp. 166–170, Feb. 2016.



# ノード選択 (空間相関の例)

MIMO,  $\rho=0.5$   
 Uncoded  
 アンテナ数/5を  
 一度に選択

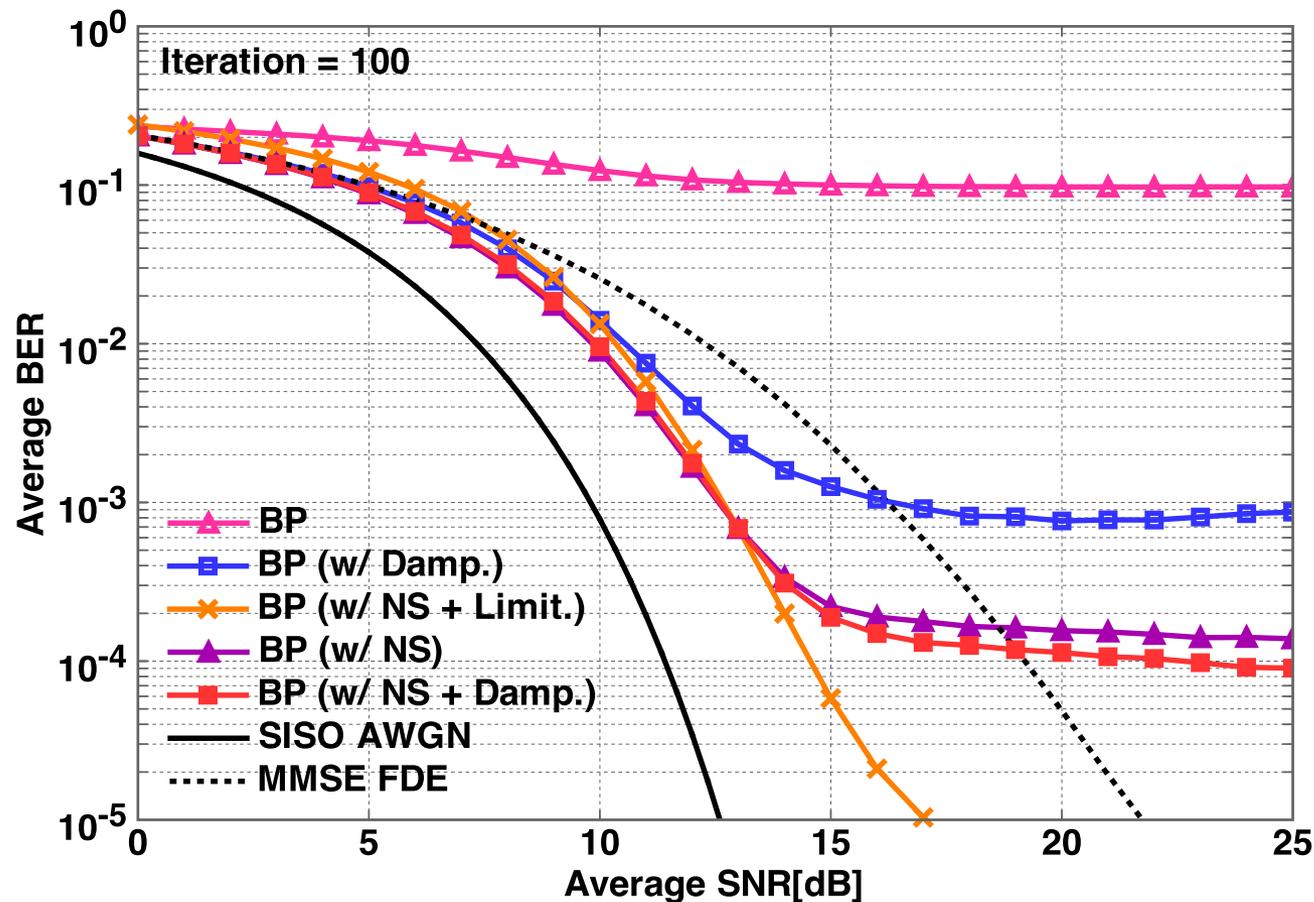


T. Takahashi, S. Ibi, T. Ohgane, and S. Sampei, "On Normalized Belief of Gaussian BP in Correlated MIMO Channels," Proc. ISITA 2016, 2016.



# ノード選択 (適応等化の例)

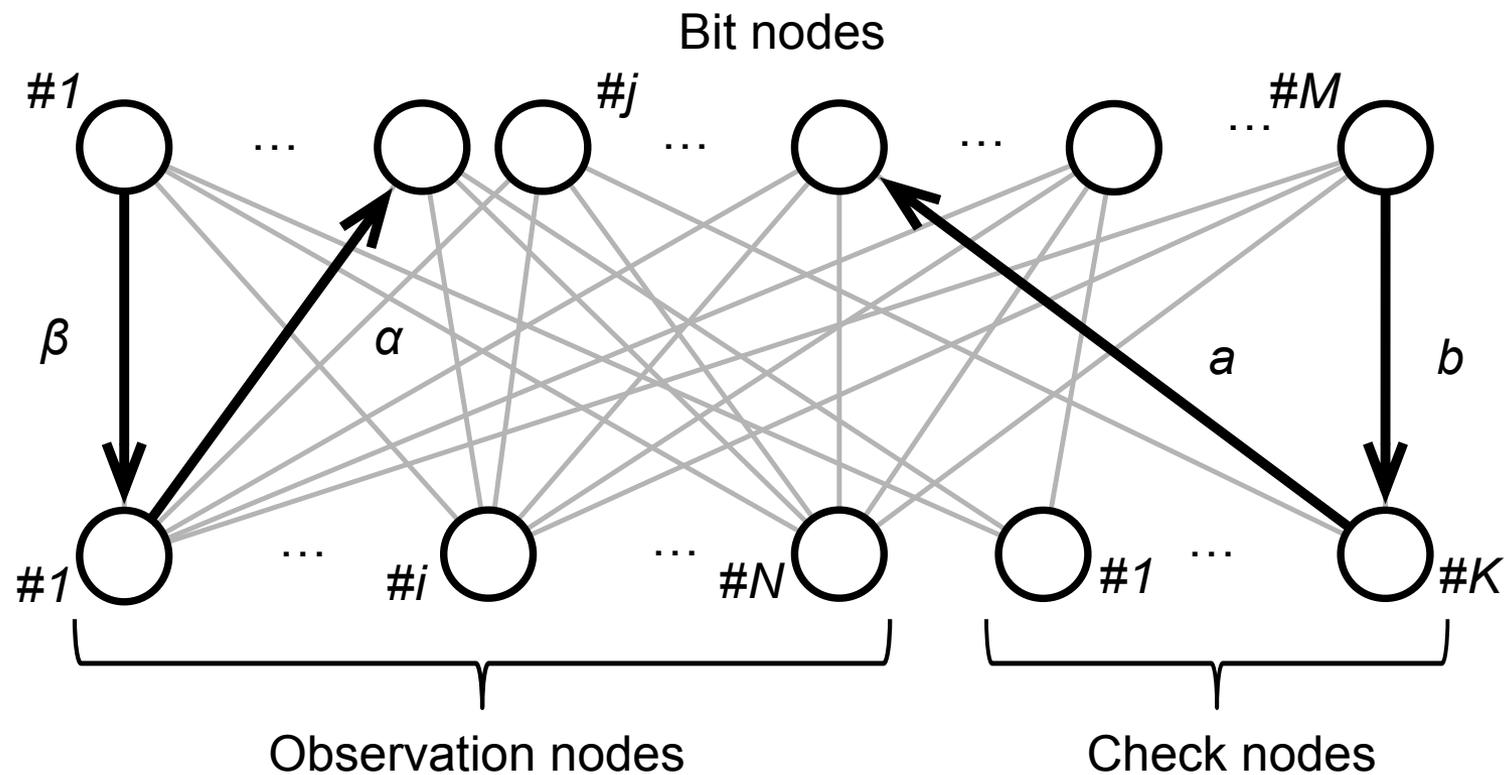
144シンボル  
ブロック  
16パス  
Uncoded



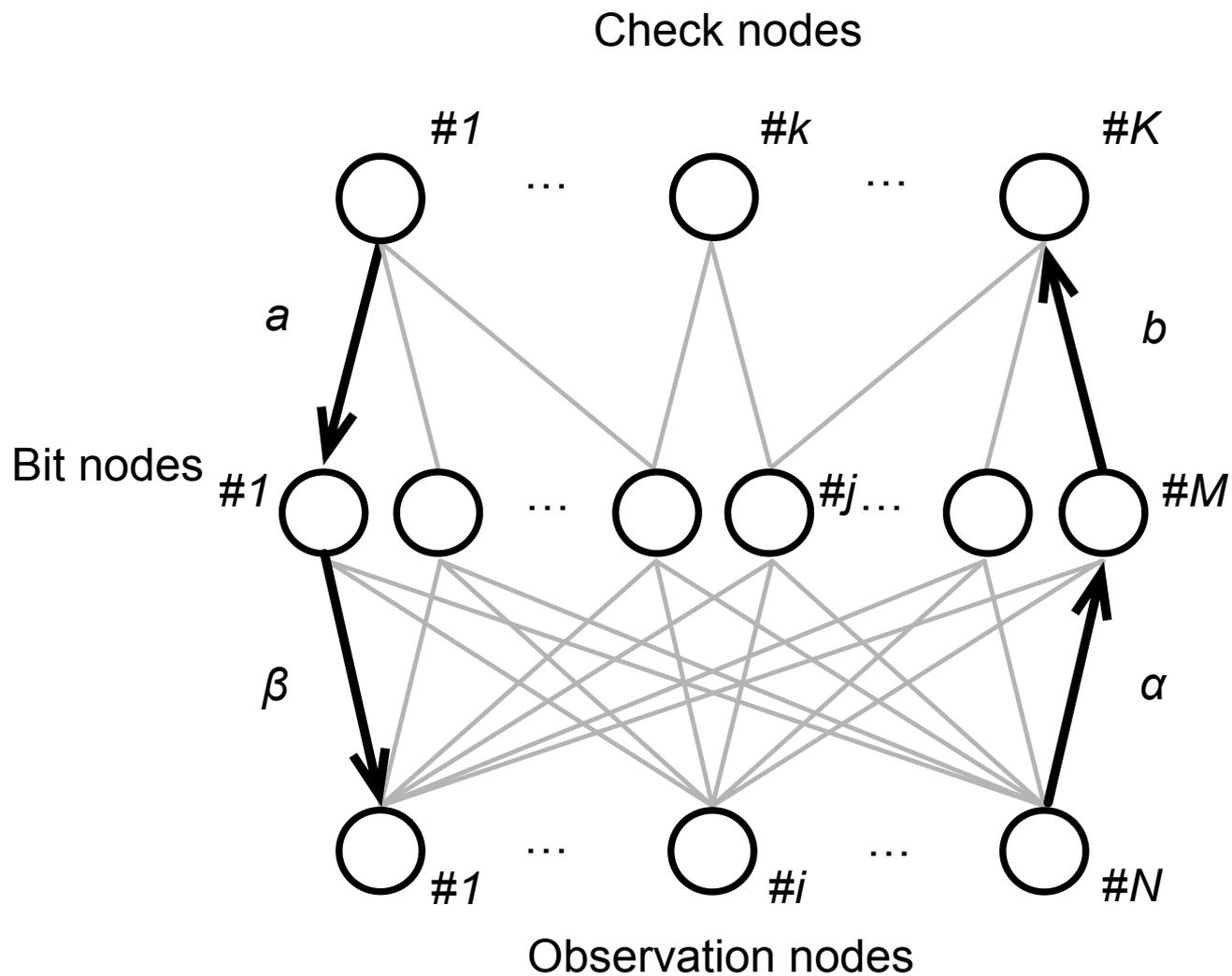
M. Hagiwara, T. Nishimura, T. Ohgane, and Y. Ogawa, "Node Selection for Belief Propagation Based Channel Equalization," IEICE Trans. Commun., vol. E100-B, no. 8, pp. 1285–1292, 2017.



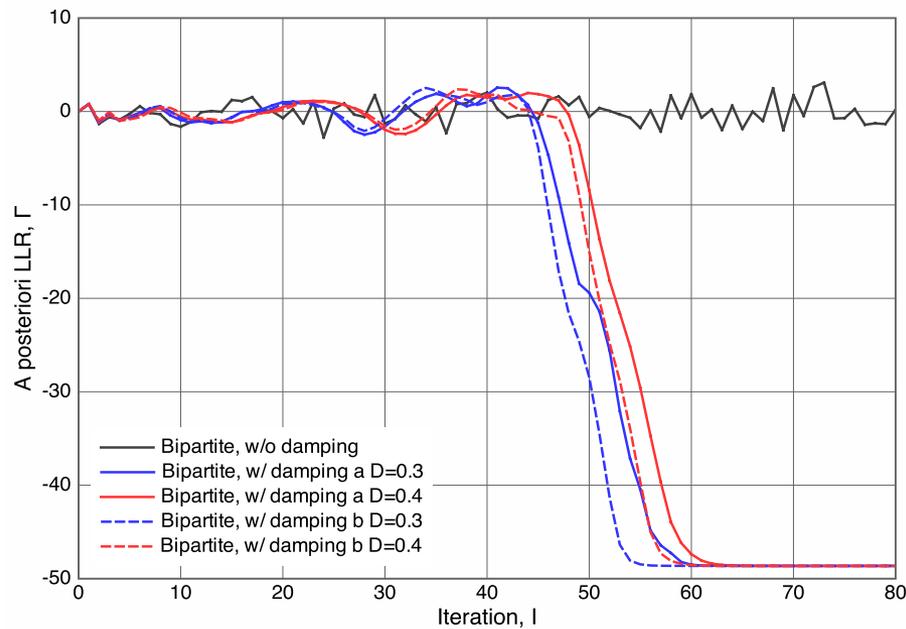
## LDPC復号とMIMO検出を同時に行ったら？



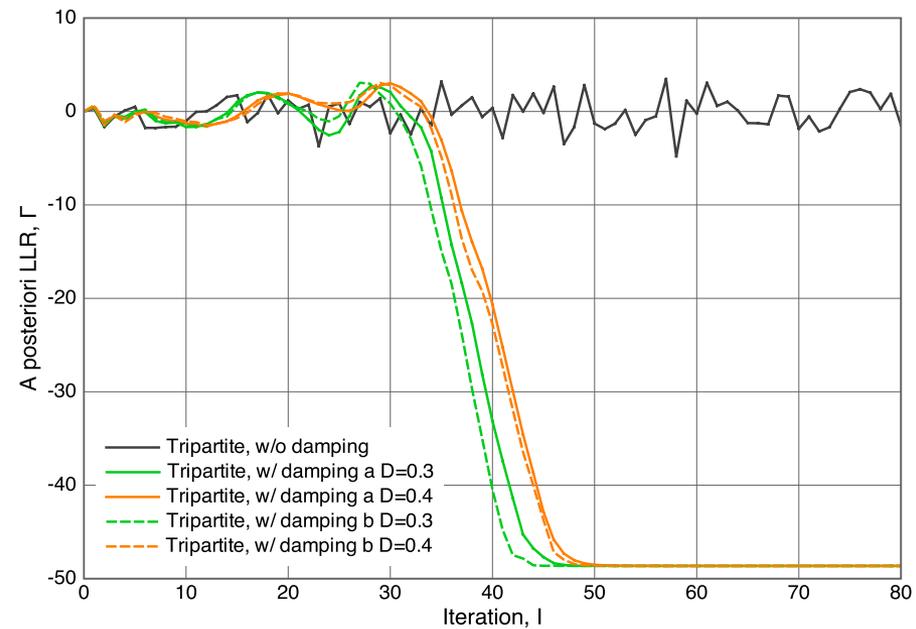
## LDPC復号とMIMO検出の交互に (ノード選択)



# LLRの収束特性例



同時更新



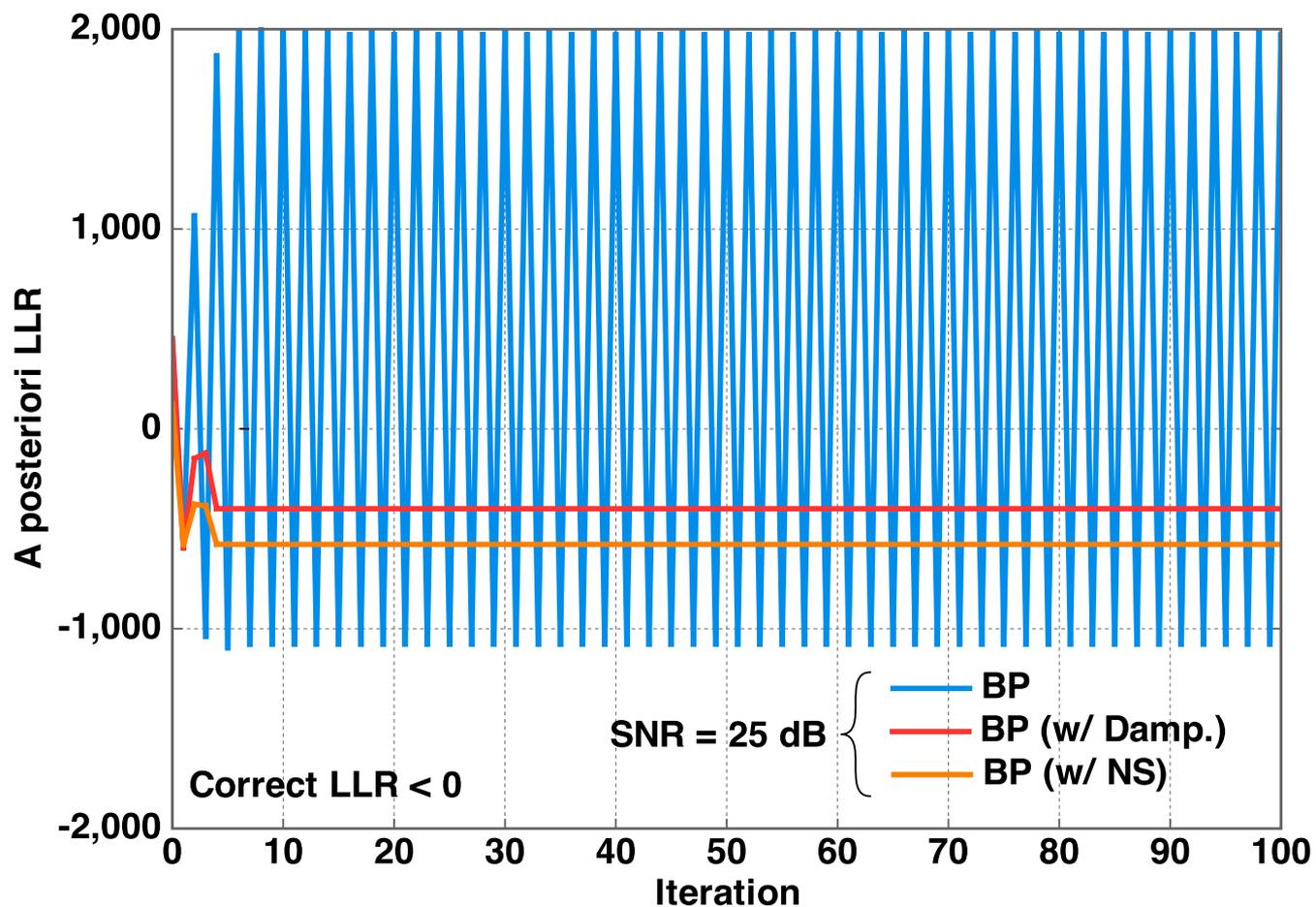
交互更新

S. Tanno, T. Nishimura, T. Ohgane, and Y. Ogawa, "Serial and Parallel LLR Updates Using Damped LLR for LDPC Coded Massive MIMO Detection with Belief Propagation," IEICE Trans. Commun., vol. E100-B, no. 8, pp. 1277–1284, 2017.



# LLR発振を完全に抑えられるか（簡単な例）

144シンボル  
ブロック  
16パス  
Uncoded

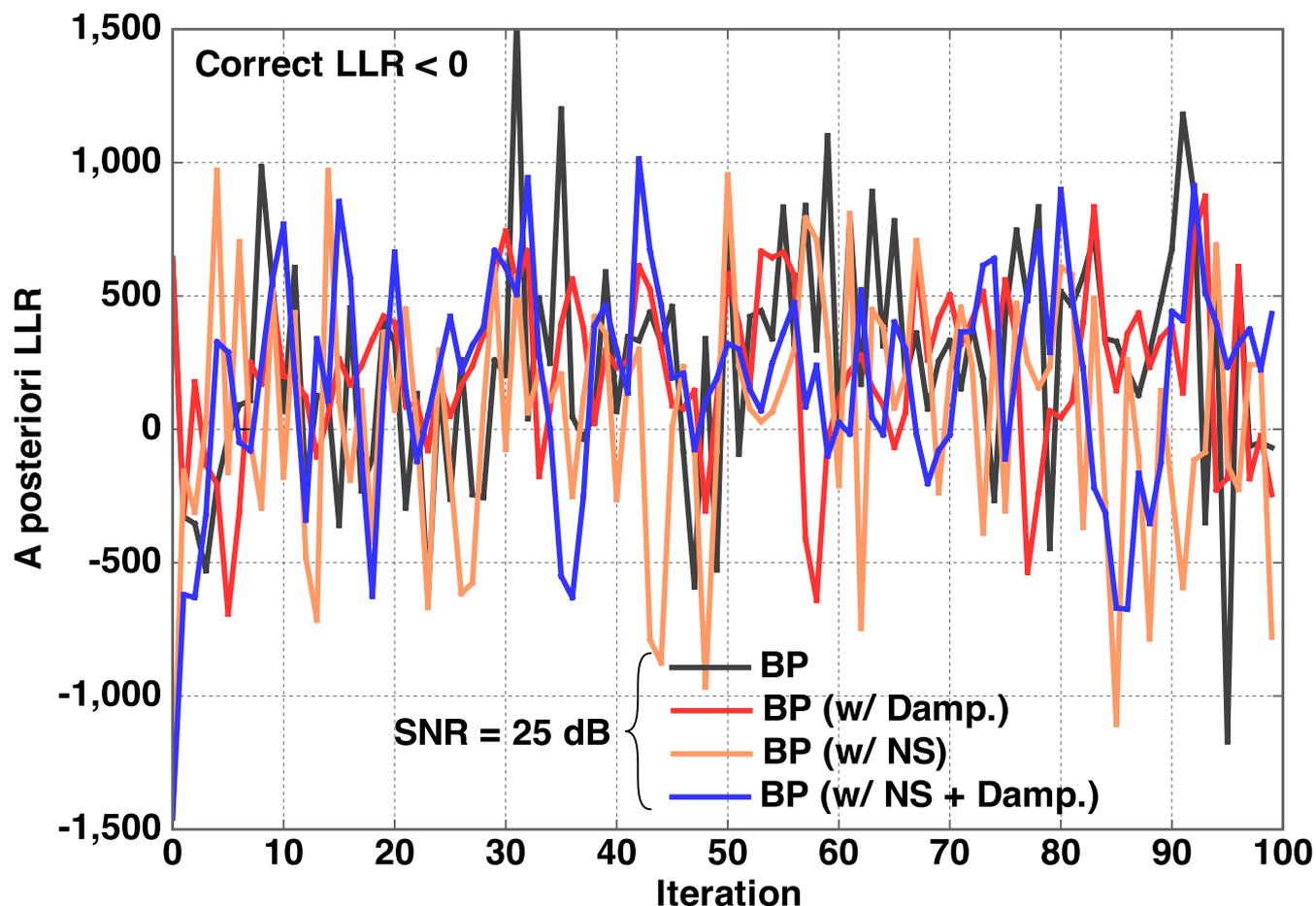


M. Hagiwara, T. Nishimura, T. Ohgane, and Y. Ogawa, "Node Selection for Belief Propagation Based Channel Equalization," IEICE Trans. Commun., vol. E100-B, no. 8, pp. 1285–1292, 2017.



# LLR発振を完全に抑えられるか（悪い例）

144シンボル  
ブロック  
16パス  
Uncoded

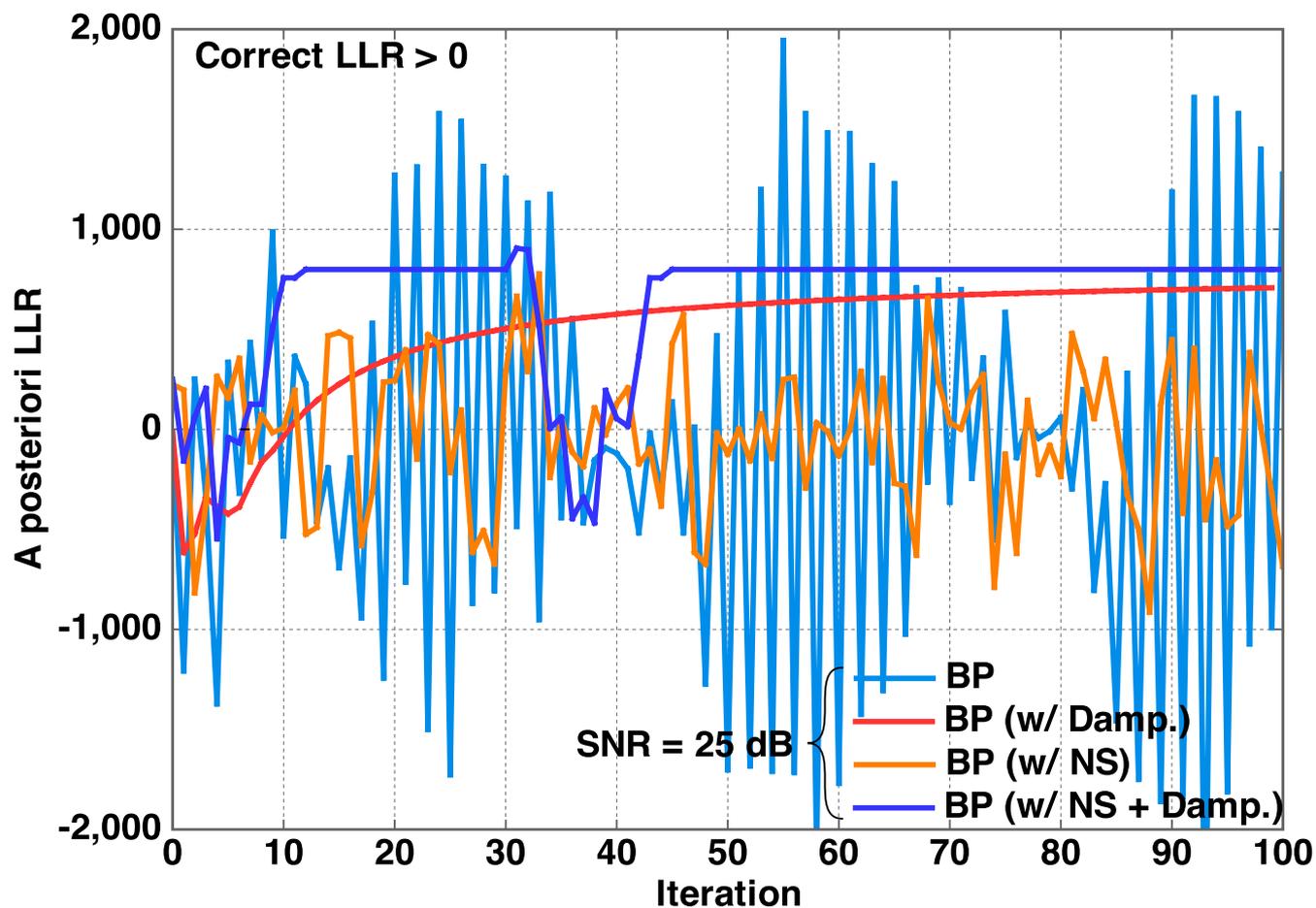


M. Hagiwara, T. Nishimura, T. Ohgane, and Y. Ogawa, "Node Selection for Belief Propagation Based Channel Equalization," IEICE Trans. Commun., vol. E100-B, no. 8, pp. 1285–1292, 2017.



# LLR発振を完全に抑えられるか（不思議な例）

144シンボル  
ブロック  
16パス  
Uncoded



M. Hagiwara, T. Nishimura, T. Ohgane, and Y. Ogawa, "Node Selection for Belief Propagation Based Channel Equalization," IEICE Trans. Commun., vol. E100-B, no. 8, pp. 1285–1292, 2017.



# おわりに

## 確率伝搬法について簡単に紹介

- ▶ 様々な分野に応用可能
- ▶ 信号検出への応用の場合, 検出対象以外をガウス近似可能
- ▶ グラフ内のループの影響
- ▶ 様々な軽減手法によるLLR改変
- ▶ Beliefは確率ではなく, 曖昧なもの (最適化可能?)

DAMPで近接作用素の最適化により, GaBPと同様のグラフ, 更新式, レプリカ生成 ( $\tanh$ ) が出現

- ▶ Beliefの定義に新たな展開期待

