通信容量制約を考慮したフィードバック制御

電子情報通信学会 情報理論研究会（IT）
若手研究者のための講演会

太田 快人 [1]　　**新銀 秀徳** [2]

[1] 京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻

[2] 山口大学大学院理工学研究科機械工学専攻

鷲羽山下電ホテル
平成 27 年 11 月 24 日 15:20–16:05

今日の予定

1. はじめに
   - 1940 年代
   - 新たな動き
   - Witsenhausen の反例
   - 安定化に必要な最小データレート
2. 制御性能限界と不安定固有値の積
3. 外乱除去問題

情報と制御 1940 年代
第 2 次大戦中の射撃管制装置制御研究

通信技術者による高射指揮装置（gun director）の設計

Warren Weaver, NDRC (National Defence Research Committee) Final report D-2 project #2, Study of errors in T-10 gun director, 1945

> *there are surprisingly close and valid analogies between the fire control prediction probelm and certain basic problems in communiation engineering.*

Department of National Defence (CANADA)

情報と制御 1940 年代

T-10 gun director の開発

ベル研究所が高射指揮装置に取り組む

- 1941 年 2 月 T-10 gun director の問題点を解決するために T-15 gun director の開発をベル研究所で開始
- Hendrik Bode はフィードバック増幅器設計の経験を生かして高射指揮装置の設計を行う．

NDRC (National Defence Research Committee) は，標的が回避行動をとる場合の経路予測する問題を 2 研究所に提案．

- ベル研究所
- MIT (Norbert Wiener)

David A. Mindell, Automation's finest hour: Bell Labs and automatic control in World War II, IEEE Control Systems, 1995

情報と制御 1940 年代

Norbert Wiener (MIT) の成果

- 1940 年ころ（？）研究開始
- 1942 年 2 月 限定配布資料　“Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Times Series with Engineering Applications”
- 1942 年 12 月 最終報告書　最適平均自乗予測を用いても 10 秒間の過去から 20 秒間の予測を与える問題について既存方法より格段に向上させることはできなかった．
- Norman Levinson や Claude E. Shannon に影響を与える．
- 1948 年 Cybernetics を刊行．

Stuart Bennett, Nobert Wiener and control of anti-aircraft guns, IEEE Control Systems, 1994.

情報理論と制御理論のつながり

情報理論

Wiener

Shannon

$\cdots$

$\Leftarrow$

$\Rightarrow$

制御理論

Nyquist

Bode

$\cdots$

1990 年代後半から始まったネットワーク化制御の進展によってつながりを再確認することになった．

- 情報が制御において持つ意味は
- 利用可能な情報と制御方策の関係は？
- 情報量と制御性能の関係は？

情報が制御においてもつ意味

動機となる問題

Witsenhausen の反例

- 線形ダイナミクス（状態遷移，観測）
- ガウス型分布（雑音，初期条件）
- 評価関数（2 乗期待値）

最適制御は線形制御則とはならない

安定化に必要な最小データレート

最低何ビットの情報を補償器に与えれば，フィードバック系を安定化できるか？

Shannon 情報源符号化定理：最低何ビットの情報を用いれば，情報源を符号化できるか？

Witsenhausen の問題

状態遷移

$$x_1 = x_0 + u_1$$
$$x_2 = x_1 - u_2$$

$x_0 : N(0, \sigma_0^2)$
平均 0, 分散 σ_0^2, 正規分布

制御入力

$$u_1 = \gamma_1(y_0)$$
$$u_2 = \gamma_2(y_1)$$

観測

$$y_0 = x_0$$
$$y_1 = x_1 + v$$

$v : N(0, 1)$
$x_0 \perp\!\!\!\perp v$ （独立）

コスト

$$\mathbb{E}\left\{k^2 u_1^2 + x_2^2\right\}$$

k は定数

- ステップ 1 雑音のない観測．制御コストあり．
- ステップ 2 雑音のある観測．制御コストなし．

Witsenhausen の問題

状態遷移

$$\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_0 + \mathrm{u}_1$$
$$\mathrm{x}_2 = \mathrm{x}_1 - \mathrm{u}_2$$

$\mathrm{x}_0 : N(0, \sigma_0^2)$
平均 0, 分散 σ_0^2, 正規分布

観測

$$\mathrm{y}_0 = \mathrm{x}_0$$
$$\mathrm{y}_1 = \mathrm{x}_1 + \mathrm{v}$$

$\mathrm{v} : N(0, 1)$
$\mathrm{x}_0 \perp\!\!\!\perp \mathrm{v}$ (独立)

制御入力

$$\mathrm{u}_1 = \gamma_1(\mathrm{y}_0)$$
$$\mathrm{u}_2 = \gamma_2(\mathrm{y}_1)$$

コスト

$$\mathbb{E}\left\{k^2\mathrm{u}_1^2 + \mathrm{x}_2^2\right\}$$

k は定数

- 線形のダイナミクス，観測．ガウス雑音．二次評価関数．(LQG 制御の枠組みと類似)
- ステップ 2 での制御入力は，ステップ 1 での観測を利用できない．

最適線形制御則

線形のダイナミクスと観測

$$\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_0 + \mathrm{u}_1 \qquad \mathrm{y}_0 = \mathrm{x}_0$$
$$\mathrm{x}_2 = \mathrm{x}_1 - \mathrm{u}_2 \qquad \mathrm{y}_1 = \mathrm{x}_1 + \mathrm{v}$$

線形制御則（定数項は 0 ）

$$\mathrm{u}_1 = a\mathrm{y}_0, \quad \mathrm{u}_2 = b\mathrm{y}_1$$

最適な a, b を求める

$\mathrm{u}_1 = a\mathrm{y}_0$ のときの制御則

制御則適用 $\mathrm{x}_1 = (1 + a)\,\mathrm{x}_0$

$\mathbb{E}\mathrm{x}_2^2$ 最小化 $\mathrm{u}_2 = \mathbb{E}(\mathrm{x}_1 \mid \mathrm{y}_1) = \dfrac{\mathbb{E}\mathrm{x}_1^2}{\mathbb{E}\mathrm{x}_1^2 + \mathbb{E}\mathrm{v}^2}\mathrm{y}_1 =: b\mathrm{y}_1$

$$b = \frac{\mathbb{E}\mathrm{x}_1^2}{\mathbb{E}\mathrm{x}_1^2 + \mathbb{E}\mathrm{v}^2} = \frac{(1+a)^2\sigma_0^2}{(1+a)^2\sigma_0^2 + 1}$$

評価関数 $\mathbb{E}\left\{k^2\mathrm{u}_1^2 + \mathrm{x}_2^2\right\} = k^2a^2\sigma_0^2 + \dfrac{(1+a)^2\sigma_0^2}{(1+a)^2\sigma_0^2 + 1}$

これを a について最小化すると最適ゲイン a, b が求まる.

非線形制御則

線形のダイナミクスと観測

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + u_1 & \qquad y_0 &= x_0 \\ x_2 &= x_1 - u_2 & \qquad y_1 &= x_1 + v \end{aligned}$$

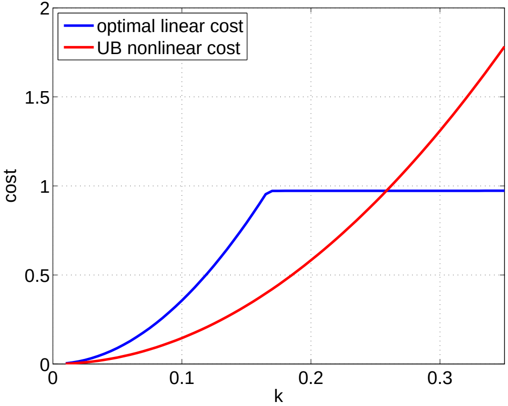
非線形制御則 (Witsenhausen 1968)

$$\begin{aligned} u_1 &= \gamma_1(y_0) = -y_0 + \sigma_0 \operatorname{sgn}(y_0) \\ u_2 &= \gamma_2(y_1) = \sigma_0 \tanh(\sigma_0 y_1) \end{aligned}$$

評価関数の上界

$$\mathbb{E}\left\{k^2 u_1^2 + x_2^2\right\} \le 2k^2\sigma_0^2\left(1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) + \sigma_0^2 \exp\left(-\frac{\sigma_0^2}{2}\right)$$

最適線形制御則と非線形制御則



最適線形制御則評価関数と非線形制御則評価関数上界 ($\sigma_0 = 6$)

$$\mathbb{E}\left\{k^2 \mathbf{u}_1^2 + \mathbf{x}_2^2\right\}$$

最適線形制御則評価関数

$$\min_a \left\{k^2 a^2 \sigma_0^2 + \frac{(1+a)^2 \sigma_0^2}{(1+a)^2 \sigma_0^2 + 1}\right\}$$

非線形制御則評価関数上界

$$2k^2\sigma_0^2\left(1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) + \sigma_0^2 \exp\left(-\frac{\sigma_0^2}{2}\right)$$

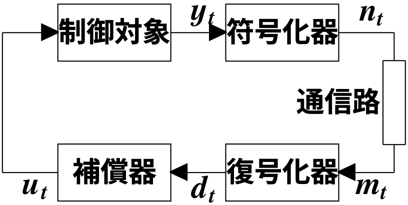
Witsenhausen の反例 $k = 0.2$

- 最適線形制御則評価関数 0.9725
- 非線形制御則評価関数上界 0.5821

安定化に必要な最小データレート

制御対象（可安定，可検出）

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t$$
$$y_t = Cx_t$$
$x_0 \in \Lambda_0$ 既知有界開集合



通信路

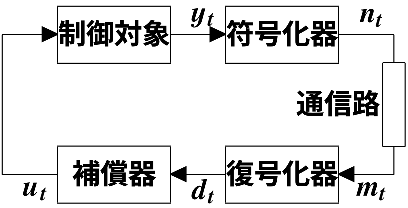
- 誤りのない離散的通信路
- 2^R 個以下のアルファベット（R ビットでの通信）

制御対象が符号化器，複合化器，補償器を適切に選んで安定化できるための条件を求める．

安定化に必要な最小データレート

制御対象（可安定，可検出）

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t$$
$$y_t = Cx_t$$
$x_0 \in \Lambda_0$　既知有界開集合



定理（安定化可能）

図の制御対象が安定化可能であるためには，

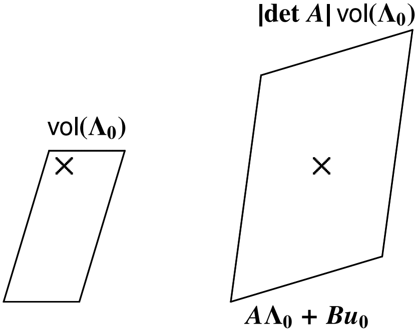
$$R \geq \sum_i \max\{0, \log_2 |\lambda_i|\}$$

であることが必要である．逆に上の条件で不等号が厳密に成り立てば，安定化可能である．

[S. Tatikonda, and S.K. Mitter: Control under communication constraints; 2004]

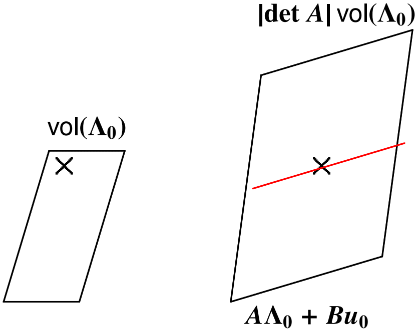
安定化に必要な最小データレート

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t, \quad y_t = Cx_t, \quad x_0 \in \Lambda_0$$



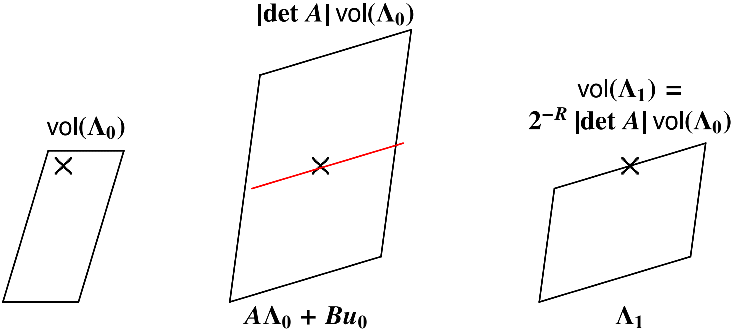
安定化に必要な最小データレート

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t, \quad y_t = Cx_t, \quad x_0 \in \Lambda_0$$



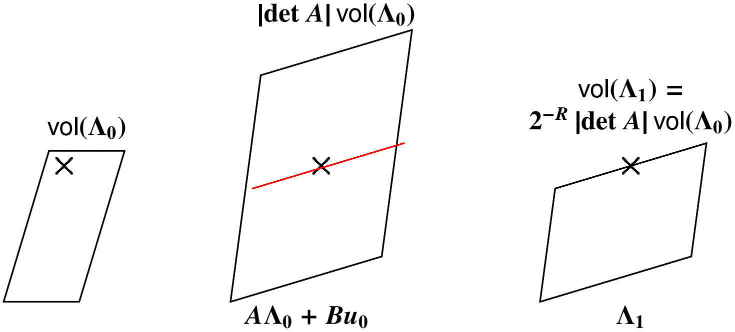
安定化に必要な最小データレート

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t, \quad y_t = Cx_t, \quad x_0 \in \Lambda_0$$



安定化に必要な最小データレート

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t, \quad y_t = Cx_t, \quad x_0 \in \Lambda_0$$



繰り返し

$$\mathrm{vol}(\Lambda_t) = 2^{-Rt}\, |\det A|^t\, \mathrm{vol}(\Lambda_0)$$

集合体積が小さくなる条件

$$R > \log_2 |\det A| = \log_2 \Pi_i |\lambda_i| = \sum_i \log_2 |\lambda_i|$$

今日の予定

1. はじめに
2. 制御性能限界と不安定固有値の積
   - 不安定固有値の積
   - 位相的エントロピー・不変エントロピー
   - Bode の定理
   - 有向情報量
3. 外乱除去問題

不安定固有値の積

行列 A の固有値 λ_i は制御性能などの指標と関係が深い

$$\Pi_{|\lambda_i|>1} |\lambda_i|$$

- **安定化のための最小データレート**
- **位相的エントロピーと不変エントロピー**
- Bode **の感度積分定理**
- **有向情報量**

位相的エントロピー

非線形システム

$$x(t+1) = f(x(t))$$

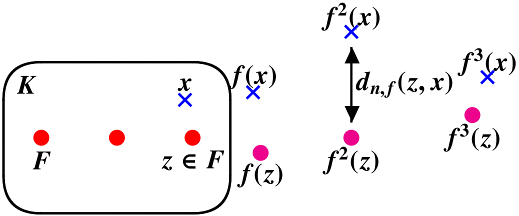
$f : X \to X$

X は d を距離とする距離空間

$d_{n,f}(x_1, x_2) = \max_{0\le k\le n-1} d(f^k(x_1), f^k(x_2))$

(n, ε) スパン

$\varepsilon > 0$ とコンパクト集合 $K \subset X$ を考える．集合 $F \subset X$ が，任意の $x \in K$ に対して，$z \in F$ が存在して $d_{n,f}(z, x) < \varepsilon$ を満たすとき，F は K を (n, ε) スパンするという．



$$f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ times}}$$

位相的エントロピー

非線形システム

$$x(t+1) = f(x(t))$$

$f : X \to X$
X は d を距離とする距離空間

位相的エントロピー

コンパクト集合 K を (n, ε) スパンする最小要素数の集合 F の要素数を $r(n, \varepsilon, K, f)$ とするとき

$$h_{\mathrm{top}}(f) = \sup_{K \subset X \text{compact}} \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln r(n, \varepsilon, K, f)$$

を f の位相的エントロピーという．

線形システムの位相的エントロピー

$f(x) = Ax$ となる線形システムに対しては，位相エントロピーは $\prod_{|\lambda_i|>1} |\lambda_i|$ で与えられる．

[R. Bowen: Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces; 1971]

不変エントロピー

外部入力をもった非線形システム

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)), \quad u \in \mathcal{U}$$

状態空間 $\mathbb{R}^n$

制御入力の集合

$$\mathcal{U} = \{u \ : \ u(t) \in U\}$$

$U \subset \mathbb{R}^{n_u}$ **（制御値の集合）**

制御不変

状態空間の部分集合 $Q \subset \mathbb{R}^n$ は制御不変：任意の初期状態 $x_0 \in Q$ に対して $u \in \mathcal{U}$ が存在して，そのときの軌道は $x(t) \in Q$ を満たす．

不変エントロピー

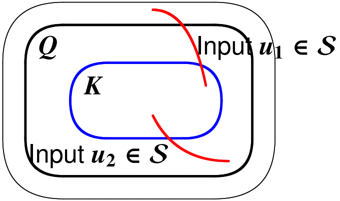
外部入力をもった非線形システム

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)), \quad u \in \mathcal{U}$$

コンパクト集合 $K \subset Q$
Q は制御不変
$T, \varepsilon > 0$

(K, Q) に対する (T, ε) スパンする集合

$x_0 \in K \subset Q$ を初期条件とするとき $u \in \mathcal{S} \subset \mathcal{U}$ が存在して，その入力を用いるとき解軌道 $x(t)$, $0 \leq t \leq T$ は集合 Q の ε 近傍（ただし状態空間のユークリッド距離を用いるものとする）にとどまるとき，$\mathcal{S}$ を (K, Q) に対する (T, ε) スパンする集合という．



不変エントロピー

外部入力をもった非線形システム

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)), \quad u \in \mathcal{U}$$

コンパクト集合 $K \subset Q$
$r_{\mathrm{inv}}(T, \varepsilon, K, Q)$: (K, Q) に対する (T, ε) スパンする集合の最小要素数

不変エントロピー

不変エントロピー

$$h_{\mathrm{inv}}(K, Q) = \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \ln r_{\mathrm{inv}}(T, \varepsilon, K, Q)$$

線形制御システムの不変エントロピー

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

集合 $K \subset Q$. Q は制御不変. K が正の Lebesgue 測度.

$$h_{\mathrm{inv}}(K, Q) = \sum_{\mathrm{Re}\,\lambda_i > 0} \mathrm{Re}\,\lambda_i$$

[F. Colonius, and C. Kawan: Invariance entropy for control systems; 2009]

不変エントロピー

連続時間系

$$\frac{d}{dt}x = Ax$$

A の固有値 λ_i

e^{Ah} の不安定固有値の積

サンプル系

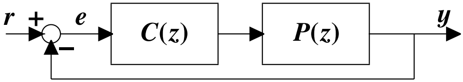
$$x((k+1)h) = e^{Ah}x(kh)$$

e^{Ah} の固有値 $e^{\lambda_i h}$

$$\prod_{|e^{\lambda_i h}|>1} \left|e^{\lambda_i t}\right| = \prod_{\mathrm{Re}\,\lambda_i>0} \left|e^{\lambda_i t}\right| = \exp\left(h \sum_{\mathrm{Re}\,\lambda_i>0} \mathrm{Re}\,\lambda_i\right)$$

連続時間系での不安定固有値の和は，離散時間系での不安定固有値の積に関係する．

感度関数



フィードバック系

一巡伝達関数

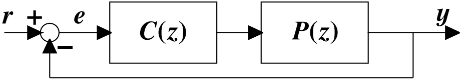
$$L(z) = P(z)C(z)$$

感度関数

$$S(z) = \frac{1}{1 + L(z)}$$

感度関数は，参照入力 r から偏差 e までの伝達関数
フィードバック系が安定化されていれば，$\left|S(e^{j\theta})\right| \ll 1$ となる周波数帯で y は r によい追従性能を示す．

Bode の定理



フィードバック系

一巡伝達関数 $L(z) = P(z)C(z)$

感度関数 $S(z) = \dfrac{1}{1 + L(z)}$

仮定

一巡伝達関数 $L(z)$ は以下を満たす．

- 分母次数が分子次数を上回る
- $L(z)$ は単位円上に極をもたない．単位円外の極を $p_i,\ i = 1, \ldots, n$ とする．

Bode 感度積分定理

フィードバック系が安定化されているときには，以下が成り立つ．

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|S(e^{j\theta})\right| d\theta = \sum_{i=1}^{n} \ln |p_i|$$

Bode の定理

Bode 感度積分定理

フィードバック系が安定化されているときには，以下が成り立つ．

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln \left|S(e^{j\theta})\right| d\theta = \sum_{i=1}^{n} \ln |p_i|$$

右辺は非負

- **フィードバック効果のある条件 $\left|S(e^{j\theta})\right| \ll 1$ を満たす周波数帯は，制約される．**
- **フィードバック系の性能限界が，不安定固有値（極）の積によって定まっている．**

エントロピーと情報量

確率変数 x の確率密度関数 $p_{\mathrm{x}}(x)$

エントロピー（Shannon エントロピー）

確率変数 x のエントロピー

$$h(\mathrm{x}) = -\int p_{\mathrm{x}}(x) \log_2 p_{\mathrm{x}}(x) dx$$

条件付きエントロピー

確率変数 x, y ：条件付き確率密度関数 $p_{\mathrm{x}|\mathrm{y}=y}$ に対するエントロピー $h(\mathrm{x} \mid \mathrm{y} = y)$ を用いて，ω を根源事象とするとき

$$h(\mathrm{x} \mid \mathrm{y}) = \mathbb{E} h(\mathrm{x} \mid \mathrm{y} = \mathrm{y}(\omega))$$

情報量

確率変数 x から y への情報量

$$I(\mathrm{x}; \mathrm{y}) = h(\mathrm{x}) - h(\mathrm{x} \mid \mathrm{y})$$

時系列

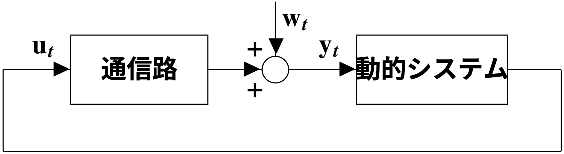
時刻 t までの部分系列：$x^t = (x_0, x_1, \ldots, x_t)$:

有向情報量

離散時間確率過程 x_t, y_t

$$I(\mathrm{x}^T \to \mathrm{y}^T) = \sum_{t=0}^{T} I_1(\mathrm{x}^t; \mathrm{y}_t \mid \mathrm{y}^{t-1})$$

有向情報量と感度積分



p_i : 動的システムの不安定極

有向情報量と感度積分

信号 u_t から y_t への有向情報量と感度関数を考えると以下が成り立つ．

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}I(\mathrm{u}^T\to\mathrm{y}^T)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left|S(e^{j\theta})\right|d\theta=\sum_i\ln|p_i|$$

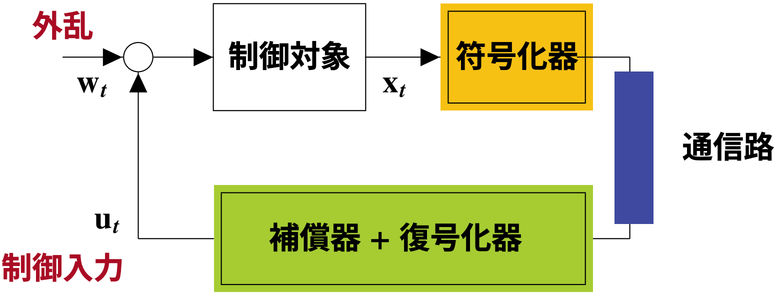
[N. Elia: When Bode meets Shannon: control-oriented feedback communication schemes; 2004]

- Bode 感度積分定理と，Shannon の情報量が関係する式

今日の予定

1. はじめに
2. 制御性能限界と不安定固有値の積
3. 外乱除去問題
   - 問題設定
   - 通信路制約と情報量制約
   - 性能限界式

外乱除去問題



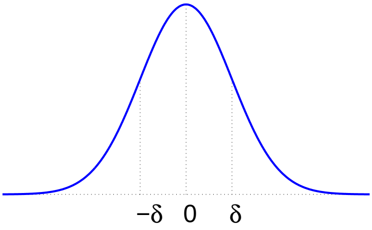
- 外乱 w_t による影響を排して状態 x_t を小さくする．
  (状態 x_t の大きさの測り方)
- 通信路による制約下で，制御性能の限界を求める．
  (通信路制約の与え方)

外乱

外乱の時系列 $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_t, \ldots)$

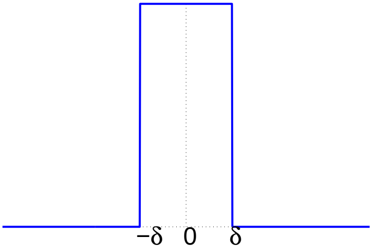
Gauss 型雑音

$\mathbf{w}_t : N(0, \delta^2)$,
Gauss **型独立同分布系列．**



有界雑音

$\mathbf{w}_t : [-\delta, \delta]$ **に分布支持，**
独立同分布系列．



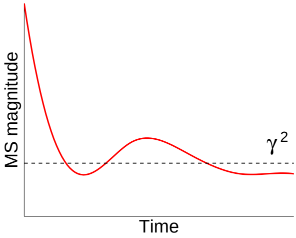
制御性能の評価基準

外乱除去問題の場合

Gauss 型雑音

平均自乗値

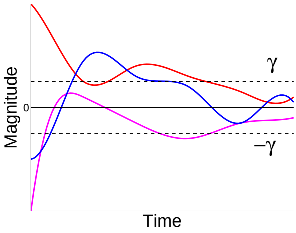
$$\limsup_{t\to\infty} \mathbb{E}\,(x_t)^2 \le \gamma^2$$



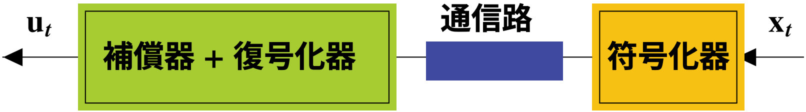
有界雑音

最悪時の絶対値

$$\limsup_{t\to\infty} \operatorname{ess\,sup}_w |x_t| \le \gamma$$



通信路による制約



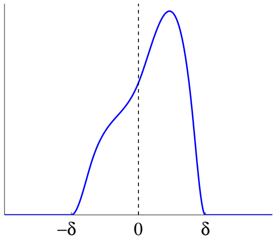
- 情報量制約
  - エントロピー，条件付きエントロピー
  - 情報量
- 通信路制約
  - 雑音のある通信路
  - 離散アルファベット

エントロピー

0 次と 1 次の Rényi エントロピー

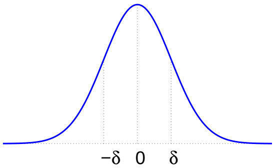
$$h_0(\mathrm{x}) = \log \mu S_{\mathrm{x}}$$

$$h_1(\mathrm{x}) = -\int p_{\mathrm{x}}(\xi) \log p_{\mathrm{x}}(\xi) d\xi \quad \text{(Shannon エントロピー)}$$



区間 $[-\delta, \delta]$ に支持をもつ分布

$$h_0(\mathrm{x}) = \log_2(2\delta)$$



Gauss **分布** $N(0, \delta^2)$

$$h_1(\mathrm{x}) = \log_2\left(\sqrt{2\pi e}\delta\right)$$

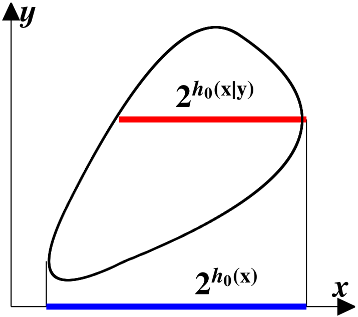
条件付きエントロピー

x の y に関する条件付きエントロピー

$$h_0(\mathrm{x} \mid \mathrm{y}) = \operatorname{ess\,sup} h_0(\mathrm{x} \mid \mathrm{y} = \mathrm{y}(\omega))$$

$$h_1(\mathrm{x} \mid \mathrm{y}) = \mathbb{E} h_1(\mathrm{x} \mid \mathrm{y} = \mathrm{y}(\omega))$$

(Shannon の条件付きエントロピー)



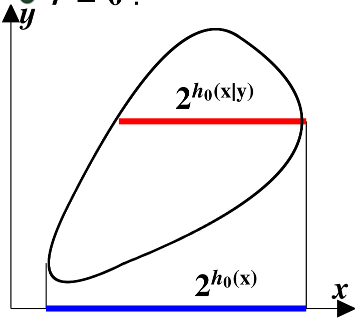
0 次の条件付きエントロピー

情報量

x から y への情報量

$$I_r(\mathrm{x};\mathrm{y}) = h_r(\mathrm{x}) - h_r(\mathrm{x} \mid \mathrm{y})$$

- $r = 1$: Shannon **の相互情報量**
- $r = 0$:



$$2^{I_0(\mathrm{x};\mathrm{y})} = \frac{2^{h_0(\mathrm{x})}}{2^{h_0(\mathrm{x}|\mathrm{y})}}$$

0 次と 1 次のエントロピーの性質

エントロピーの冪不等式

確率変数 x, y は独立（x ⊥⊥ y）とする．
このとき

$$2^{(1+r)h_r(\mathrm{x})} + 2^{(1+r)h_r(\mathrm{y})} \le 2^{(1+r)h_r(\mathrm{x}+\mathrm{y})}, \quad r = 0, 1.$$

最大エントロピー定理

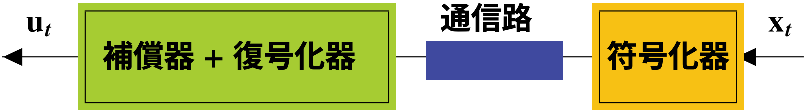
確率変数 x
0 次エントロピー：ess sup |x| ≤ δ ならば

$$h_0(\mathrm{x}) \le \log_2 (2\delta)$$

1 次エントロピー：$\mathbb{E}\mathrm{x}^2 \le \delta^2$ ならば

$$h_1(\mathrm{x}) \le \frac{1}{2} \log_2 2\pi e \delta^2$$

情報量制約



最大情報量制約 (MI)

$$I_r\left(\mathbf{x}_t; \mathbf{u}_t \mid \mathbf{u}^{t-1}\right) \leq R$$

平均情報量制約 (AI)

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} I_r\left(\mathbf{x}_t; \mathbf{u}_t \mid \mathbf{u}^{t-1}\right) \leq R$$

平均情報量制約は緩い

(MI) $\Rightarrow$ (AI)

時系列確率過程

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_t, \ldots), \quad \mathbf{u}^{t-1} = (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_{t-1})$$

通信路制約

無雑音ディジタル通信路

$$\mathbf{m}_t = \mathbf{n}_t, \quad \left|S_{\mathbf{m}_t}\right| < \infty, \quad \mathbf{m}_t \in S_{\mathbf{m}_t}$$

通信路制約（アルファベットの数）

(MC) $$\left|S_{\mathbf{m}_t}\right| \le 2^R$$

(AAC) $$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1} \left|S_{\mathbf{m}_t}\right| \le 2^R$$

(GAC) $$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1} \log_2 \left|S_{\mathbf{m}_t}\right| \le R$$

(GAC) **が最も緩い制約**

(MC)
$\Rightarrow$ (AAC)
$\Rightarrow$ (GAC)

通信路制約

加法的ガウス通信路

通信路

$$\mathbf{m}_t \longleftarrow \boxed{\phantom{\text{通信路}}} \longleftarrow \mathbf{n}_t$$

$$\mathbf{m}_t = \mathbf{n}_t + \mathbf{v}_t, \quad \mathbf{n}_t \perp\!\!\!\perp \mathbf{v}_t \sim N(0, \varepsilon^2)$$

通信路制約（信号と雑音の比）

(MC) $$\frac{\mathbb{E}\mathbf{m}_t^2}{\varepsilon^2} \le 2^{2R}$$

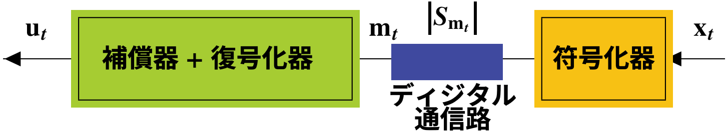
(AAC) $$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \frac{\mathbb{E}\mathbf{m}_t^2}{\varepsilon^2} \le 2^{2R}$$

(GAC) $$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \frac{1}{2} \log_2 \frac{\mathbb{E}\mathbf{m}_t^2}{\varepsilon^2} \le R$$

(GAC) **が最も緩い制約**

(MC)
⇒ (AAC)
⇒ (GAC)

情報量制約と通信路制約の関係



情報量制約

(MI) $I_r\left(\mathbf{x}_t; \mathbf{u}_t \mid \mathbf{u}^{t-1}\right) \le R$

(AI) $\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} I_r\left(\mathbf{x}_t; \mathbf{u}_t \mid \mathbf{u}^{t-1}\right) \le R$

通信路制約

(MC) $|S_{\mathbf{m}_t}| \le 2^R$

(AAC) $\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} |S_{\mathbf{m}_t}| \le 2^R$

(GAC) $\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \log_2 |S_{\mathbf{m}_t}| \le R$

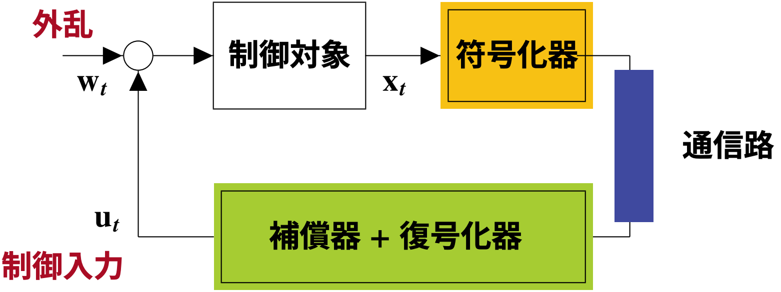
(MC) $\Rightarrow$ (AAC) $\Rightarrow$ (GAC)

$\Downarrow$ **復号化器が単射**

(MI) $\Rightarrow$ (AI)

Gauss **型外乱の場合も同様な結果が成立**

情報量制約下の外乱除去問題（問題設定）



システム記述
（有界外乱の場合）

$$\mathrm{x}_{t+1} = a\mathrm{x}_t + \mathrm{w}_t + \mathrm{u}_t$$
$$|\mathrm{x}_0| \le \gamma_0, \quad |\mathrm{w}_t| \le \delta$$
$$\mathrm{w}_t \perp\!\!\!\perp \left(\mathrm{x}_0, \mathrm{w}^{t-1}, \mathrm{u}^t\right)$$

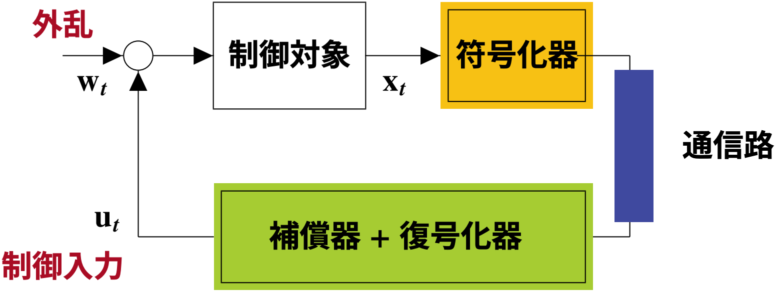
通信路

$$I_0\left(\mathrm{x}_t; \mathrm{u}_t \mid \mathrm{u}^{t-1}\right) \le R$$

制御性能

$$\limsup_{t\to\infty} |\mathrm{x}_t| \le \gamma$$

情報量制約下の外乱除去問題（問題設定）



システム記述
（Gauss 型外乱の場合）

$$\mathrm{x}_{t+1} = a\mathrm{x}_t + \mathrm{w}_t + \mathrm{u}_t$$
$$\mathrm{x}_0 \sim N(0, \gamma_0^2), \ \ \mathrm{w}_t \sim N(0, \delta^2)$$
$$\mathrm{w}_t \perp\!\!\!\perp \left(\mathrm{x}_0, \mathrm{w}^{t-1}, \mathrm{u}^t\right)$$

通信路

$$I_1(x_t; u_t | u^{t-1}) \le R$$

制御性能

$$\limsup_{t\to\infty} \mathbb{E}\, |\mathrm{x}_t|^2 \le \gamma^2$$

情報量制約下の外乱除去問題（結果，情報量制約）

定理

$a \neq 0$ とする．最大情報量制約（レート R）を満たし制御性能 γ を満足する制御入力 u が存在するためには，以下の条件が必要十分である．

$$\gamma > \delta, \quad R \geq \log_2 \frac{|a|}{1-(\delta/\gamma)}, \quad \text{(有界外乱)}$$

$$\gamma > \delta, \quad R \geq \frac{1}{2}\log_2 \frac{|a|^2}{1-(\delta/\gamma)^2}, \quad \text{(Gauss 型外乱)}$$

[H. Shingin, and Y. Ohta: Disturbance rejection with information constraints; 2012]

情報量制約下の外乱除去問題（結果，情報量制約）

定理

$a \neq 0$ とする．最大情報量制約（レート R）を満たし制御性能 γ を満足する制御入力 u が存在するためには，以下の条件が必要十分である．

$$\gamma > \delta, \quad R \geq \log_2 \frac{|a|}{1 - (\delta/\gamma)}, \quad \text{(有界外乱)}$$

$$\gamma > \delta, \quad R \geq \frac{1}{2} \log_2 \frac{|a|^2}{1 - (\delta/\gamma)^2}, \quad \text{(Gauss 型外乱)}$$

[H. Shingin, and Y. Ohta: Disturbance rejection with information constraints; 2012]

- 情報量 R は $|a|$ が大きく（不安定系），δ が大きく（外乱大），γ が小さい（要求性能高）ほど大きくなる．

情報量制約下の外乱除去問題（結果，情報量制約）

定理

$a \neq 0$ とする．最大情報量制約（レート R）を満たし制御性能 γ を満足する制御入力 $\mathbf{u}$ が存在するためには，以下の条件が必要十分である．

$$\gamma > \delta, \quad R \geq \log_2 \frac{|a|}{1-(\delta/\gamma)}, \quad \text{(有界外乱)}$$

$$\gamma > \delta, \quad R \geq \frac{1}{2}\log_2 \frac{|a|^2}{1-(\delta/\gamma)^2}, \quad \text{(Gauss 型外乱)}$$

[H. Shingin, and Y. Ohta: Disturbance rejection with information constraints; 2012]

- 情報量 R は $|a|$ が大きく（不安定系），δ が大きく（外乱大），γ が小さい（要求性能高）ほど大きくなる．
- 達成可能な性能限界は，最大情報量制約を次の平均情報量制約に緩めても変わらない．

$$\limsup_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T-1} I_0\left(\mathbf{x}_t ; \mathbf{u}_t \mid \mathbf{u}^{t-1}\right) \leq R$$

情報量制約下の外乱除去問題（結果，情報量制約）

定理

$a \neq 0$ とする．最大情報量制約（レート R）を満たし制御性能 γ を満足する制御入力 $\mathbf{u}$ が存在するためには，以下の条件が必要十分である．

$$\gamma > \delta, \quad R \geq \log_2 \frac{|a|}{1-(\delta/\gamma)}, \qquad \text{(有界外乱)}$$

$$\gamma > \delta, \quad R \geq \frac{1}{2}\log_2 \frac{|a|^2}{1-(\delta/\gamma)^2}, \qquad \text{(Gauss 型外乱)}$$

[H. Shingin, and Y. Ohta: Disturbance rejection with information constraints; 2012]

- 情報量制約を通信路制約（無雑音ディジタル通信路や加法的 Gauss 通信路による制約）に置き換えても，これらの性能限界を表す不等式は変わらない．

情報量制約下の外乱除去問題（結果，情報量制約）

定理

$a \neq 0$ とする．最大情報量制約（レート R）を満たし制御性能 γ を満足する制御入力 $\mathbf{u}$ が存在するためには，以下の条件が必要十分である．

$$\gamma > \delta, \quad R \geq \log_2 \frac{|a|}{1 - (\delta/\gamma)}, \qquad \text{(有界外乱)}$$

$$\gamma > \delta, \quad R \geq \frac{1}{2} \log_2 \frac{|a|^2}{1 - (\delta/\gamma)^2}, \qquad \text{(Gauss 型外乱)}$$

[H. Shingin, and Y. Ohta: Disturbance rejection with information constraints; 2012]

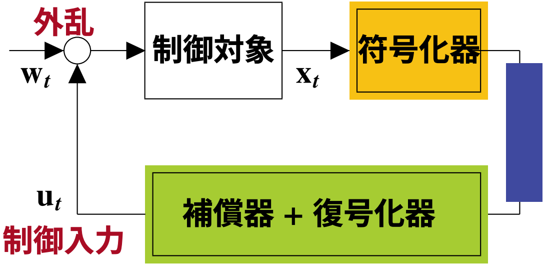
- 情報量制約を通信路制約（無雑音ディジタル通信路や加法的 Gauss 通信路による制約）に置き換えても，これらの性能限界を表す不等式は変わらない．
- Gauss 型雑音，有界雑音双方を同じ枠組みで扱える理由は，Rényi エントロピーを用いてエントロピー冪不等式，最大エントロピー定理が適用できるからである．

状態数 2 以上の場合

有界外乱除去問題における情報量制約と達成可能な制御性能限界

- 状態数 1（スカラー系）の場合には，厳密な関係．
- 状態数 2 以上の場合
  - 性能限界の十分条件（必要ビット数の上界）
  - 性能限界の必要条件（必要ビット数の下界）

外乱除去問題



通信路

$$I_0\left(\mathbf{x}_t;\mathbf{u}_t \mid \mathbf{u}^{t-1}\right) \le R$$

または

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1} I_0\left(\mathbf{x}_t;\mathbf{u}_t \mid \mathbf{u}^{t-1}\right) \le R$$

制御対象 $\mathbf{x}_{t+1} = A\mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t + \mathbf{u}_t, \quad \det A \neq 0$

- **初期値** $\|\mathbf{x}_0\| \le \gamma_0$
- **外乱** $\|\mathbf{w}_t\| \le \delta \quad \mathbf{w}_t \perp\!\!\!\perp \left(\mathbf{x}_0, \mathbf{w}^{t-1}, \mathbf{u}^t\right)$
- **制御性能** $\limsup_{t\to\infty} \|\mathbf{x}_t\| \le \gamma$

$\|\bullet\|$ は $\mathbb{R}^n$ の無限大ノルム

制御性能を達成可能な R の最小値を求めよ．

外乱除去問題十分条件（上界）

制御対象 $\mathbf{x}_{t+1} = A\mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t + \mathbf{u}_t$

- 初期値　$\|\mathbf{x}_0\| \le \gamma_0$
- 外乱　$\|\mathbf{w}_t\| \le \delta$
  $\mathbf{w}_t \perp\!\!\!\perp \left(\mathbf{x}_0, \mathbf{w}^{t-1}, \mathbf{u}^t\right)$
- 制御性能　$\limsup_{t\to\infty} \|\mathbf{x}_t\| \le \gamma$

$\|\bullet\|$ は $\mathbb{R}^n$ の無限大ノルム

$$I_0\left(\mathbf{x}_t; \mathbf{u}_t \mid \mathbf{u}^{t-1}\right) \le R$$

または

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} I_0\left(\mathbf{x}_t; \mathbf{u}_t \mid \mathbf{u}^{t-1}\right) \le R$$

定理（外乱除去問題十分条件）

外乱除去問題が，性能 γ を達成するためには，

$$R \ge n \log \frac{\alpha}{1 - \frac{\delta}{\gamma}}$$

を満たせば十分である．ただし $\alpha = \max_k \sum_{j=1}^n \left|a_{kj}\right|$（最大列絶対値和）である．

[太田，新銀: 通信路制約下での外乱抑制に関する一考察; 2010]

外乱除去問題十分条件（上界）

制御対象 $\mathrm{x}_{t+1} = A\mathrm{x}_t + \mathrm{w}_t + \mathrm{u}_t$

- 初期値　$\|\mathrm{x}_0\| \le \gamma_0$
- 外乱　$\|\mathrm{w}_t\| \le \delta$
  $\mathrm{w}_t \perp\!\!\!\perp \left(\mathrm{x}_0, \mathrm{w}^{t-1}, \mathrm{u}^t\right)$
- 制御性能　$\limsup_{t\to\infty} \|\mathrm{x}_t\| \le \gamma$

$\|\bullet\|$ は $\mathbb{R}^n$ の無限大ノルム

$$I_0\left(\mathrm{x}_t; \mathrm{u}_t \mid \mathrm{u}^{t-1}\right) \le R$$

または

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1} I_0\left(\mathrm{x}_t; \mathrm{u}_t \mid \mathrm{u}^{t-1}\right) \le R$$

定理（外乱除去問題必要条件） [Nair *et al*, 2007]

外乱除去問題が，性能 γ を達成するためには，

$$R \ge \log\left\{\frac{|\det A|}{\left(1 - \frac{\delta}{\gamma}\right)^n}\right\}$$

を満たすことが必要である．

[G.N. Nair et al: Feedback control under data rate constraints: an overview; 2007]

外乱除去問題十分条件（上界と下界）

- 上界と下界

$$n \log \frac{\alpha}{1-\frac{\delta}{\gamma}} \geq \log \left\{ \frac{|\det A|}{\left(1-\frac{\delta}{\gamma}\right)^n} \right\}$$

- $n = 1$ の場合は，上界と下界は一致する．
- 制御対象 $\mathrm{x}_{t+1} = A\mathrm{x}_t + \mathrm{w}_t + \mathrm{u}_t$ は，入力行列 $B = I$，出力行列 $C = I$ の場合に相当．
- 誤差の推定 $\hat{\mathrm{e}}$ を用いて，$\mathrm{u} = -A\hat{\mathrm{e}}$ と制御を加える．
（最適推定を用いた制御：保守性は生じる）

まとめ

情報理論と制御理論のかかわり

- 1940 年代
  - Wiener, Bode らの MIT, Bell 研での研究
  - Shannon, Nyquist らへの影響
- 1990 年ごろからのネットワーク化制御の進展
  - 情報理論的な考え方の再認識
  - Witsenhausen の反例
  - 安定化に必要な最小データレート
- 性能限界に関する研究
  - 不安定固有値の積のさまざまな役割
  - Shannon の情報量と Bode の定理の関係
  - 外乱除去問題での性能限界