SITA2013 ワークショップ

様々な情報スペクトル量を用いた操作的な話の例

有村光晴 (湘南工科大学)

2013 年 11 月 27 日

アウトライン

- 新しい情報スペクトル量の単体としての操作的な意味.
- 様々な情報スペクトル量を組み合わせて用いることで, エントロピースペクトルの「動き」を観察する.

【前半の話】

1. (復習) 4 種類の極限

2. $W(\boldsymbol{X})$, $W^*(\boldsymbol{X})$

【後半の話】

3. (復習) $\overline{H}(\boldsymbol{X})$ と $\underline{H}(\boldsymbol{X})$

4. $\overline{H}(\boldsymbol{X})$ と $\overline{H}^*(\boldsymbol{X})$

5. $W(\boldsymbol{X})$ の上下界

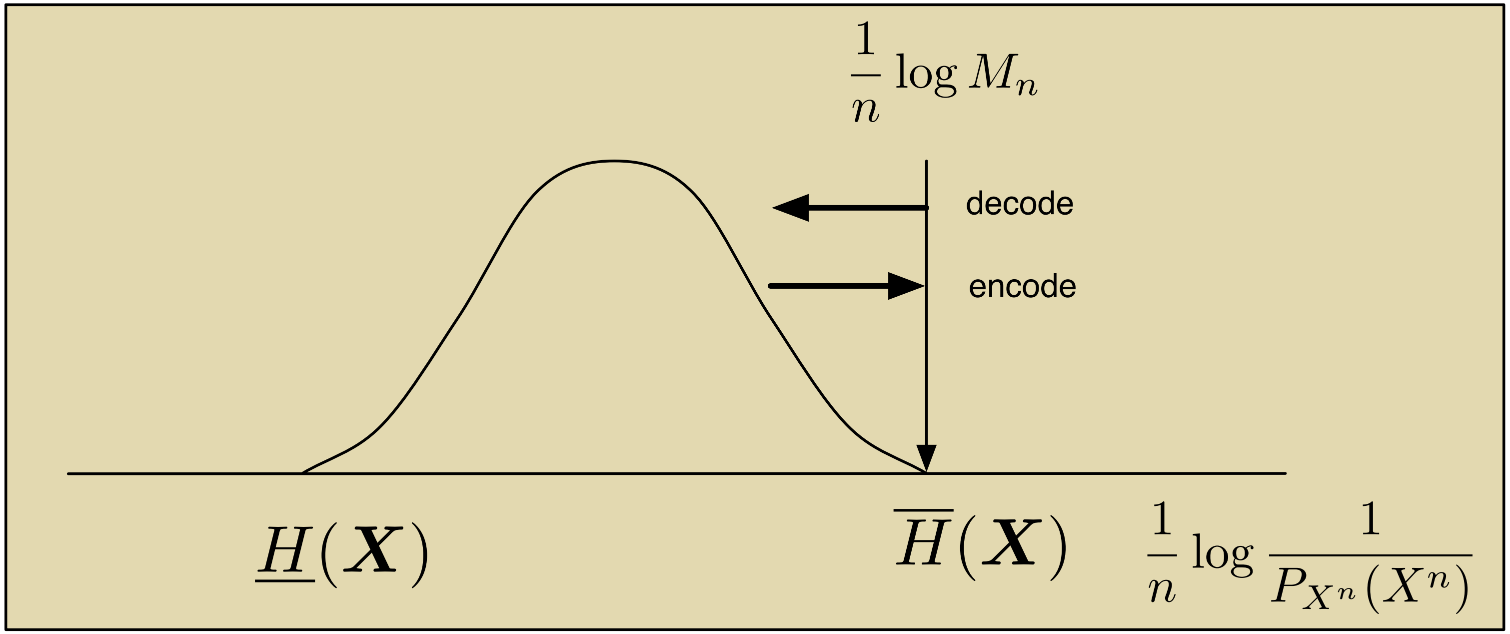
【前半の話】

新しい情報スペクトル量の単体としての操作的な意味

1. (復習) エントロピースペクトルにおける 4 種類の極限

$\overline{H}(\boldsymbol{X})$ の場合

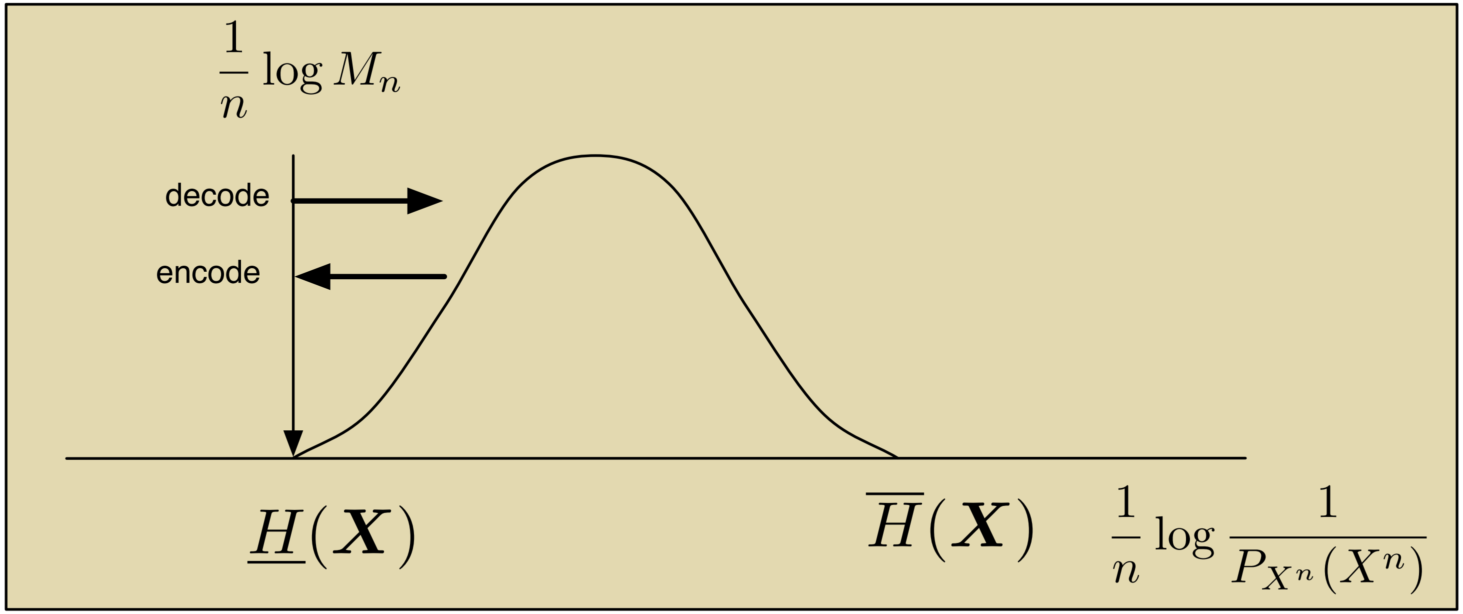
- 情報スペクトル量としての意味:
  エントロピースペクトルの右端が最も右に来る点



- 操作的な意味:
  最小の達成可能な (誤り確率の上極限が 0 となる)FF 符号化レート

$\underline{H}(\boldsymbol{X})$ の場合

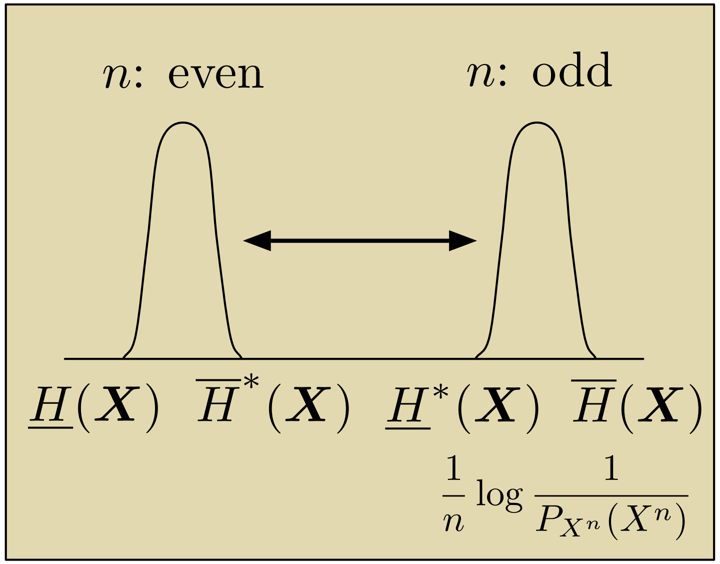
- 情報スペクトル量としての意味:
  エントロピースペクトルの左端が最も左に来る点



- 操作的な意味:
  誤り確率の下極限が 1 となる最大の符号化レート

$\overline{H}^*(\boldsymbol{X})$ の場合

- 情報スペクトル量としての意味:
  エントロピースペクトルの右端が最も左に来る点



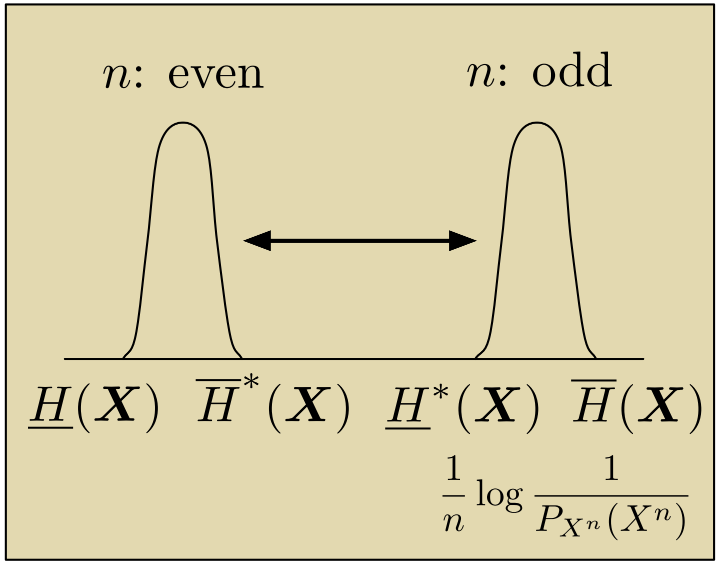
- 操作的な意味:

  1. 楽観的な最小達成可能 (誤り確率の下極限が 0 となる) 符号化レート
  2. 最大の達成不可能 (誤り確率の下極限が 0 にならない) 符号化レート

$\underline{H}^*(\boldsymbol{X})$ の場合

- 情報スペクトル量としての意味:

  エントロピースペクトルの左端が最も右に来る点



- 操作的な意味:

  誤り確率の上極限が 1 となる最大の符号化レート

2. エントロピースペクトルの幅 $W(\boldsymbol{X}), W^*(\boldsymbol{X})$ の操作的な意味

エントロピースペクトルの幅 *(Koga 2000, Koga-Arimura-Iwata 2011)*

- $W(\boldsymbol{X}) = \inf_{\mathcal{G}} \limsup_{n\to\infty}(b_n - a_n)$ (漸近的な最大幅)
- $\mathcal{G}$ は区間の無限列の集合 $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\mathcal{G} = \Big\{\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty} : \forall\gamma > 0,$$

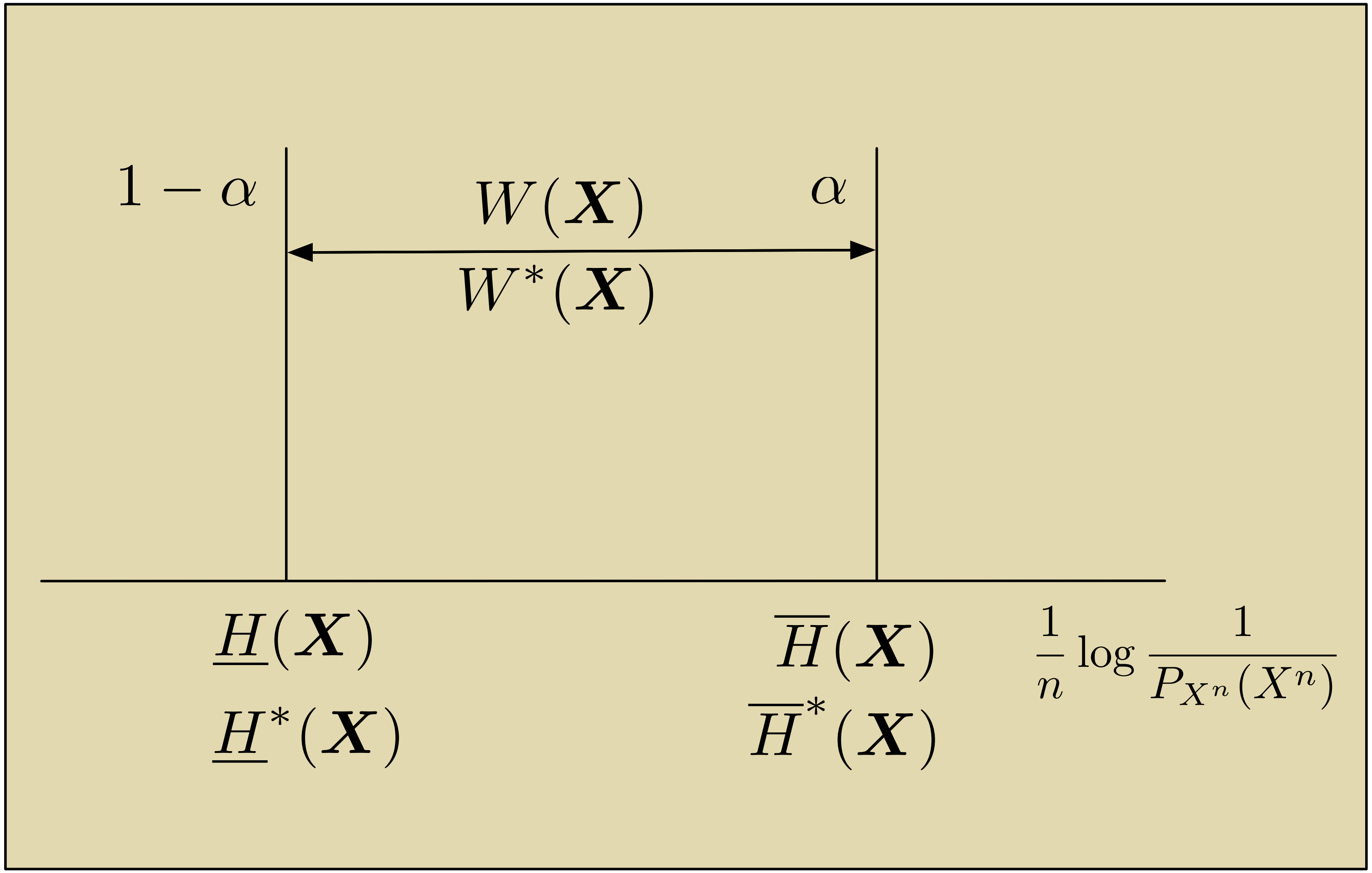
$$\lim_{n\to\infty} \Pr\Big\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \in (a_n - \gamma, b_n + \gamma)\Big\} = 1\Big\}.$$

- $W^*(\boldsymbol{X}) = \inf_{\mathcal{G}^*} \liminf_{n\to\infty}(b_n - a_n)$ (漸近的な最小幅)
- $\mathcal{G}^*$ は区間の無限列の集合 $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\mathcal{G}^* = \Big\{\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty} : \forall\gamma > 0,$$

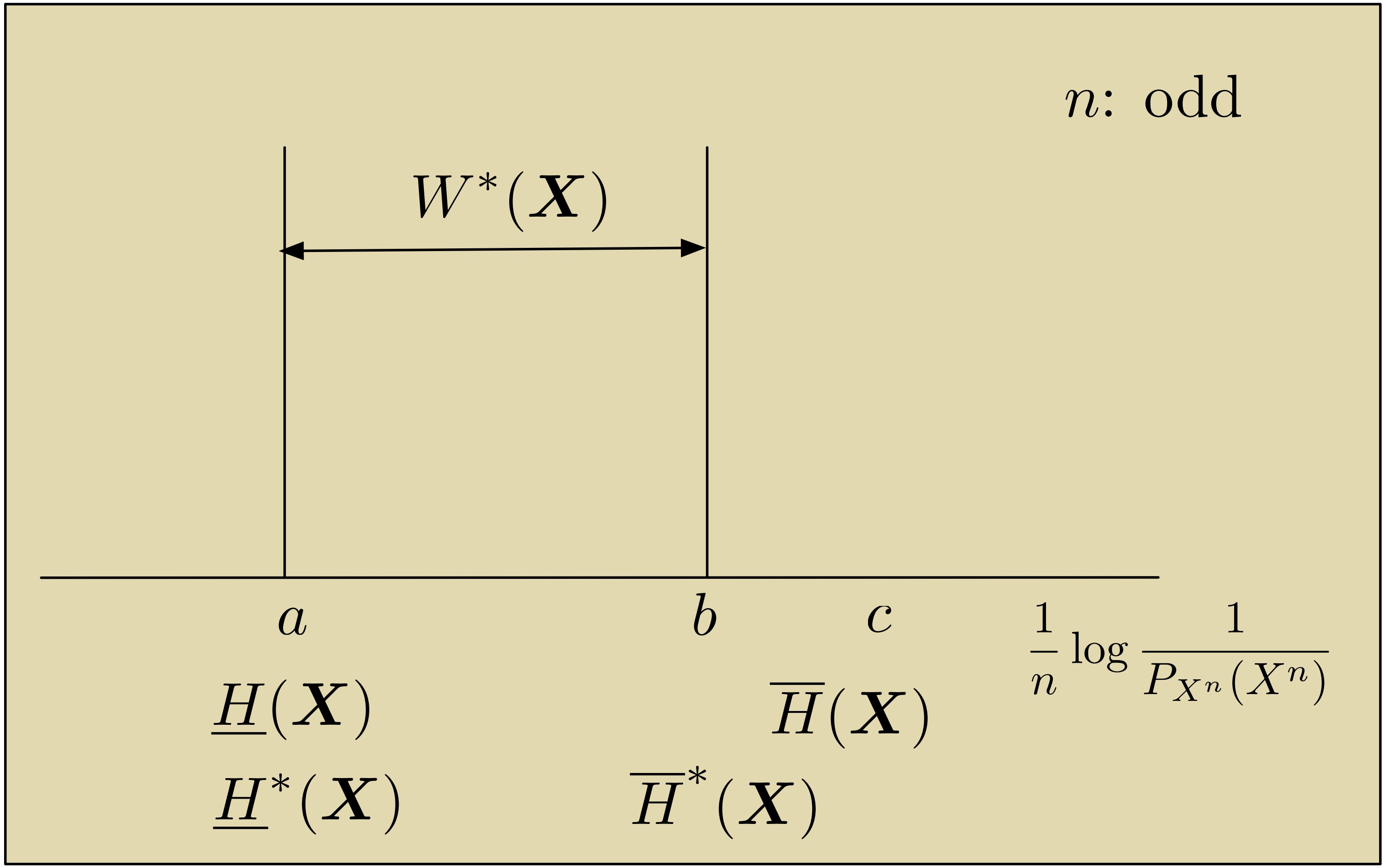
$$\limsup_{n\to\infty} \Pr\Big\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \in (a_n - \gamma, b_n + \gamma)\Big\} = 1\Big\}.$$

Example 2.1



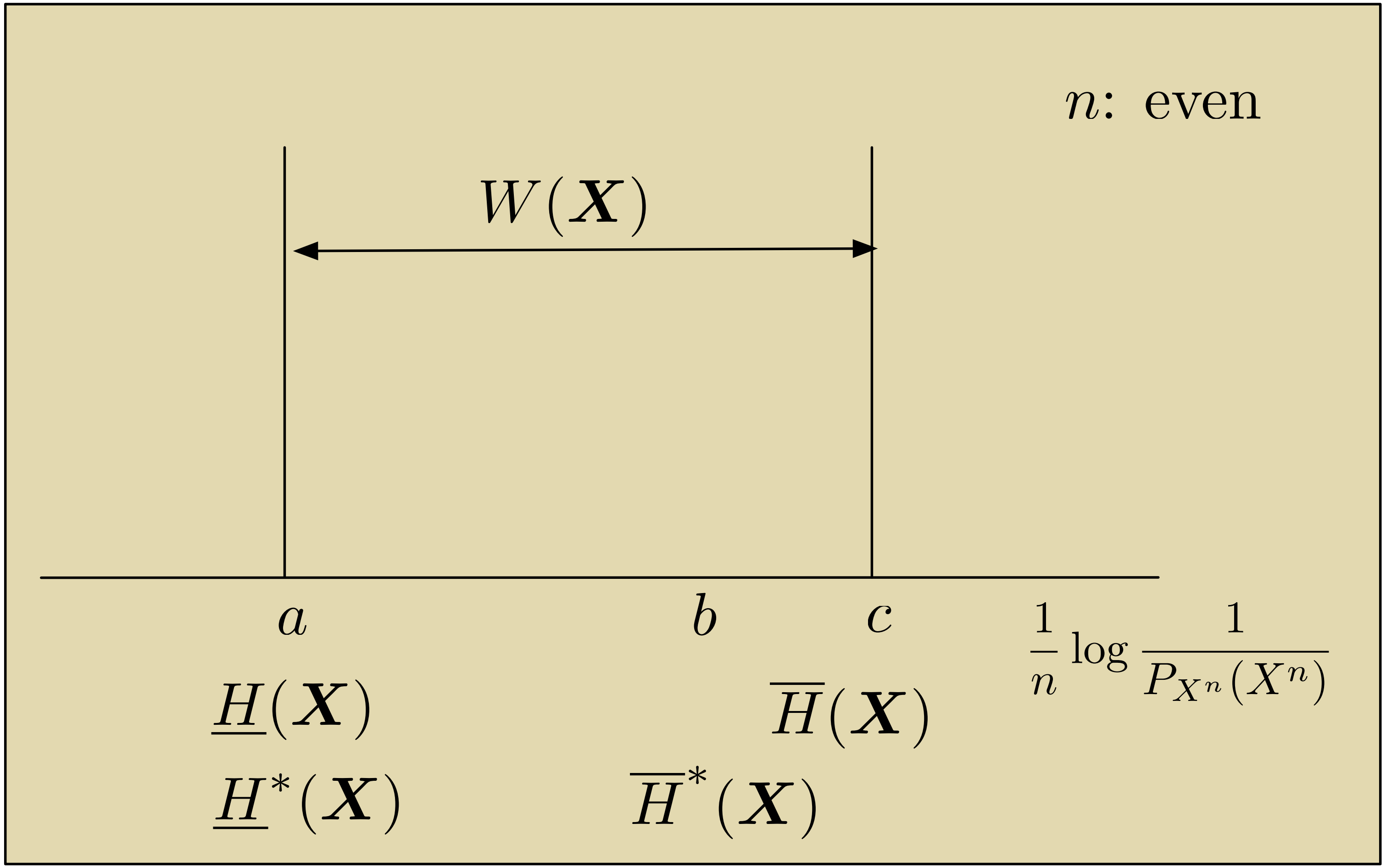
$1-\alpha$
$W(\boldsymbol{X})$
α
$W^*(\boldsymbol{X})$
$\underline{H}(\boldsymbol{X})$
$\underline{H}^*(\boldsymbol{X})$
$\overline{H}(\boldsymbol{X})$
$\overline{H}^*(\boldsymbol{X})$
$\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)}$

Example 2.2



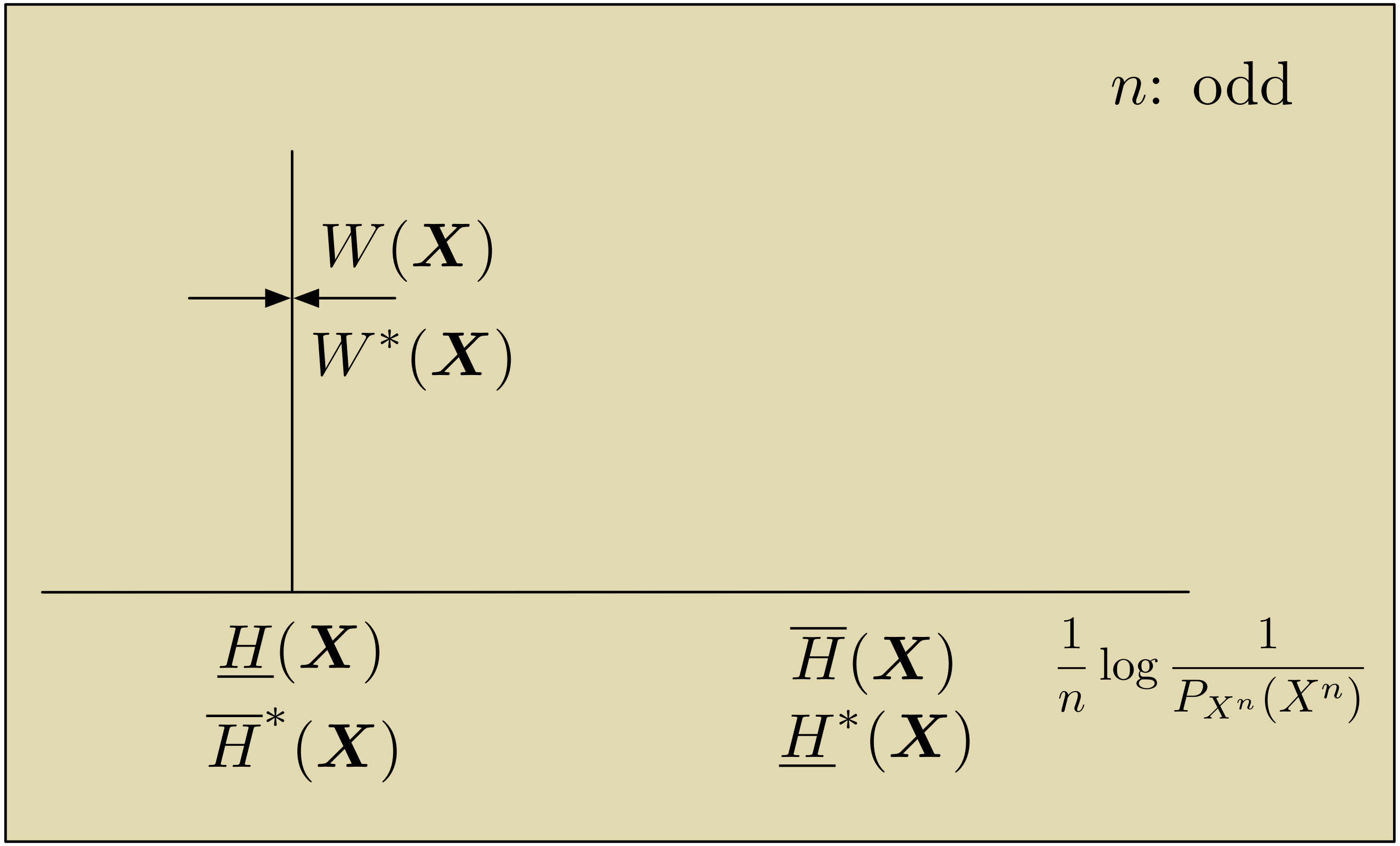
n: odd
$W^*(\boldsymbol{X})$
a
b
c
$\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)}$
$\underline{H}(\boldsymbol{X})$
$\overline{H}(\boldsymbol{X})$
$\underline{H}^*(\boldsymbol{X})$
$\overline{H}^*(\boldsymbol{X})$

Example 2.2

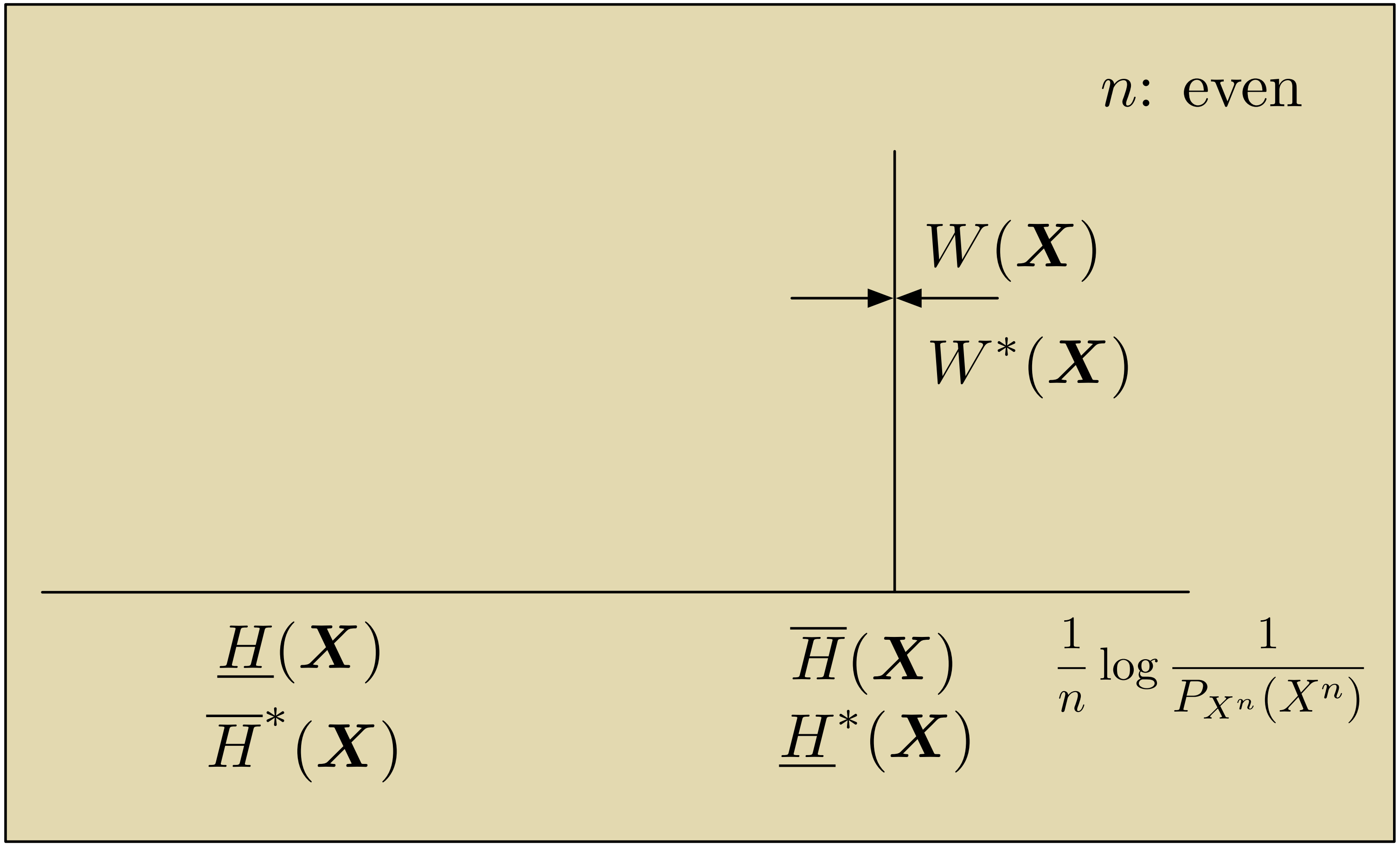


n: even
$W(\boldsymbol{X})$
a
b
c
$\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)}$
$\underline{H}(\boldsymbol{X})$
$\underline{H}^*(\boldsymbol{X})$
$\overline{H}(\boldsymbol{X})$
$\overline{H}^*(\boldsymbol{X})$

Example 2.3

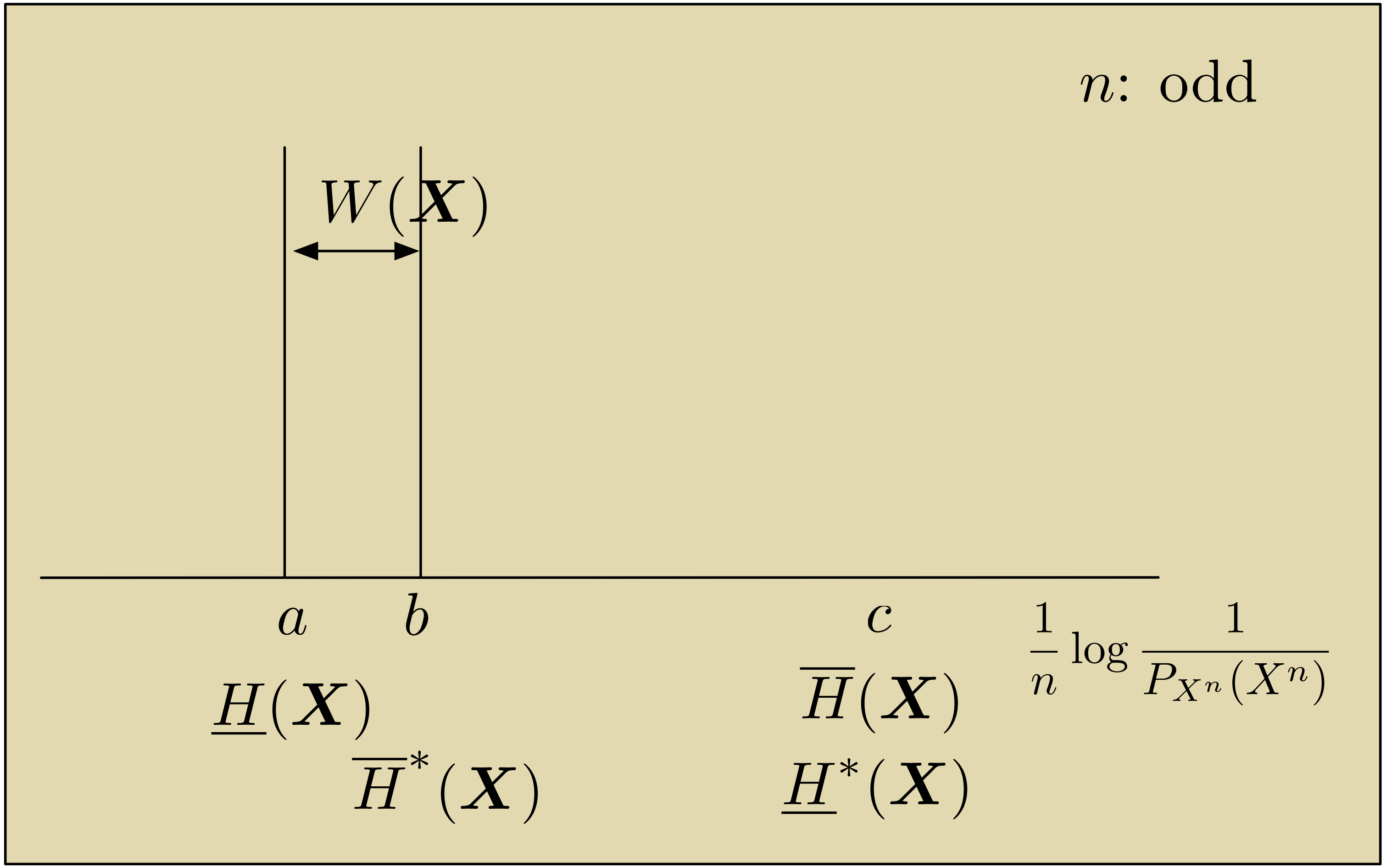

n: odd
$W(\boldsymbol{X})$
$W^*(\boldsymbol{X})$
$\underline{H}(\boldsymbol{X})$
$\overline{H}^*(\boldsymbol{X})$
$\overline{H}(\boldsymbol{X})$
$\underline{H}^*(\boldsymbol{X})$
$\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)}$

Example 2.3



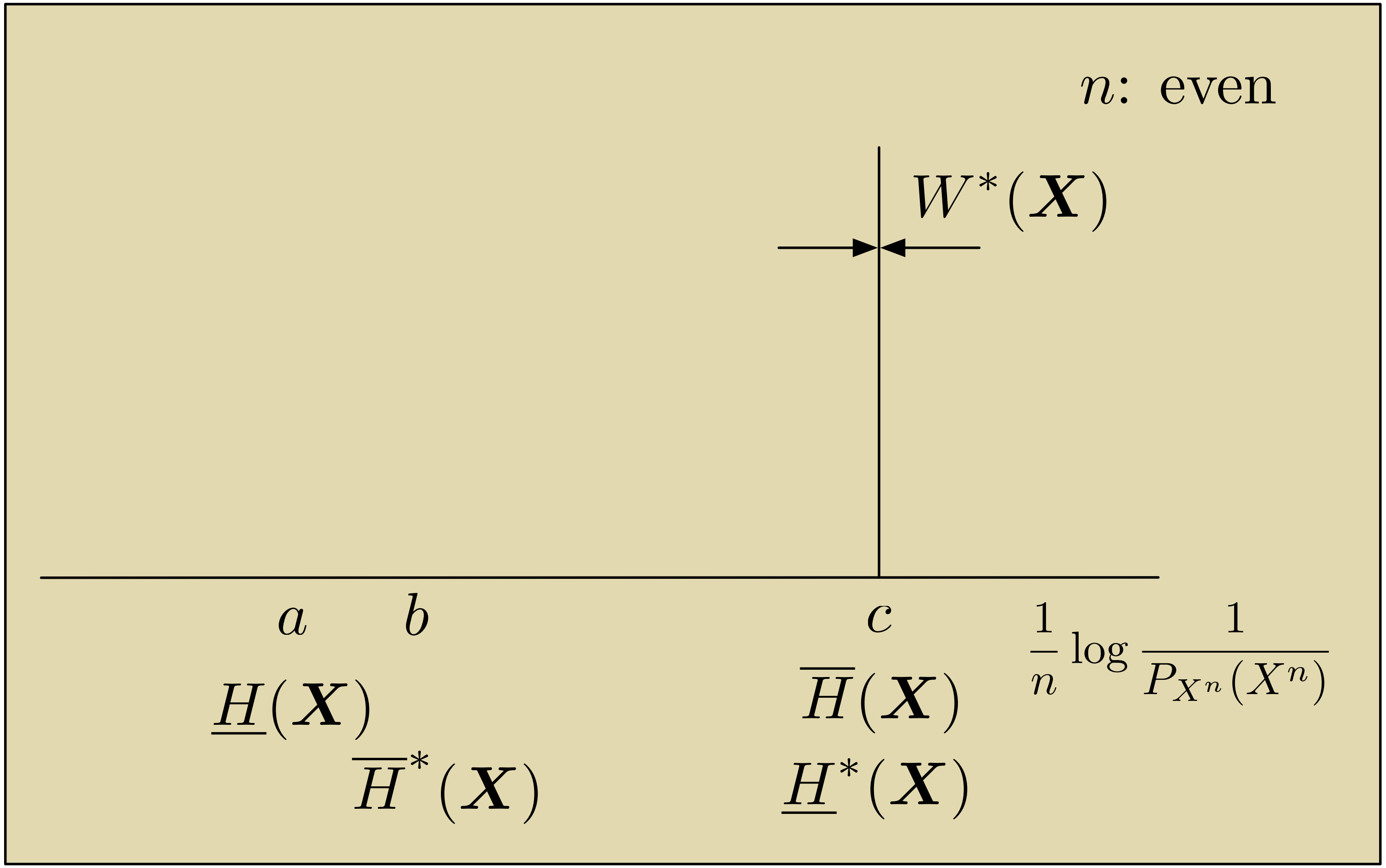
n: even
$W(\boldsymbol{X})$
$W^*(\boldsymbol{X})$
$\underline{H}(\boldsymbol{X})$
$\overline{H}^*(\boldsymbol{X})$
$\overline{H}(\boldsymbol{X})$
$\underline{H}^*(\boldsymbol{X})$
$\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)}$

Example 2.4



n: odd
$W(\boldsymbol{X})$
a
b
c
$\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)}$
$\underline{H}(\boldsymbol{X})$
$\overline{H}^*(\boldsymbol{X})$
$\overline{H}(\boldsymbol{X})$
$\underline{H}^*(\boldsymbol{X})$

Example 2.4



n: even
$W^*(\boldsymbol{X})$
a
b
c
$\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)}$
$\underline{H}(\boldsymbol{X})$
$\overline{H}^*(\boldsymbol{X})$
$\overline{H}(\boldsymbol{X})$
$\underline{H}^*(\boldsymbol{X})$

固定長 *Homophonic* 符号化 *(Koga 2000)*

- 問題設定:

1. 一般情報源 X^n を,
2. レート $\frac{1}{n}\log N_n$ の一様乱数 V_n を用いて
   レート $\frac{1}{n}\log M_n$ のほぼ一様な乱数 Y_n に変換
   $$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N_n \le R_V, \quad \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log M_n \le R_Y$$
3. V_n を用いずに Y_n を X^n に戻す
4. このときの誤り確率が漸近的に 0 に収束

- 達成可能なレート領域 $\{(R_Y, R_V)\}$ は次に等しい;

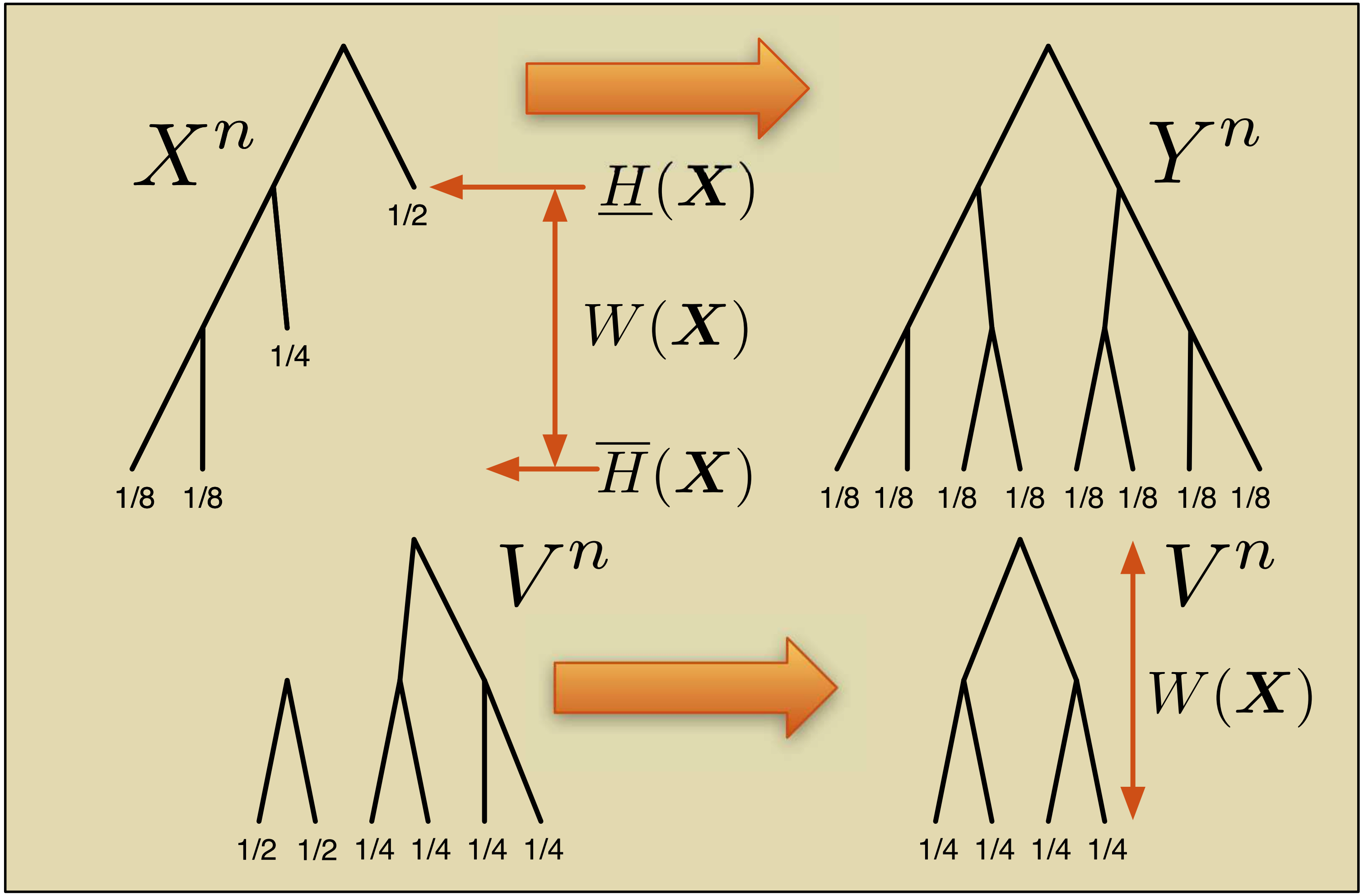
$$\{(R_Y, R_V) : R_Y \ge \overline{H}(\boldsymbol{X}),\ R_V \ge W(\boldsymbol{X})\}$$

固定長 *Homophonic* 符号化の例

1. $n = 1$ とする
2. $P_{X^n}(x_1) = \frac{1}{2}, P_{X^n}(x_2) = \frac{1}{4}, P_{X^n}(x_3) = \frac{1}{8}, P_{X^n}(x_4) = \frac{1}{8}$
3. このとき，作成できる一様乱数 Y^n は
$$P_{Y^n}(y_1) = P_{Y^n}(y_2) = \cdots = P_{Y^n}(y_8) = \frac{1}{8}$$
4. X^n から Y^n を作るための一様乱数 V_n は
$$P_{V_n}(v_1) = P_{V_n}(v_2) = P_{V_n}(v_3) = P_{V_n}(v_4) = \frac{1}{4}$$
5. $(x_1, v_1) \to y_1, (x_1, v_2) \to y_2, (x_1, v_3) \to y_3, (x_1, v_4) \to y_4,$
$$(x_2, v_1) \cup (x_2, v_2) \to y_5,$$
$$(x_2, v_3) \cup (x_2, v_4) \to y_6,$$
$$(x_3, v_1) \cup (x_3, v_2), \cup(x_3, v_3), \cup(x_3, v_4) \to y_7,$$
$$(x_4, v_5) \cup (x_4, v_6) \cup (x_4, v_7) \cup (x_4, v_8) \to y_8$$
6. $\frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{Y^n}(Y^n)} = 3, \ \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{V_n}(V_n)} = 2$

固定長 *Homophonic* 符号化の例

図で示すと:



FF符号のレートと誤り確率

- FF 符号

$$\begin{cases} \text{符号器} & \varphi_n \quad : \mathcal{X}^n \to \mathcal{M}_n = \{1, 2, \ldots, M_n\} \\ \text{復号器} & \psi_n \quad : \mathcal{M}_n \to \mathcal{X}^n \end{cases}$$

系列 $\boldsymbol{C} = \{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ を符号と呼ぶことにする.

- レート:

$$\frac{1}{n} \log M_n$$

- 誤り確率:

$$\varepsilon_n = \Pr\{\psi_n(\varphi_n(X^n)) \neq X^n\}$$

- $\varepsilon_n \to 0$ の条件の下でレートを小さくしたい.

*FF*符号の最小達成可能レート

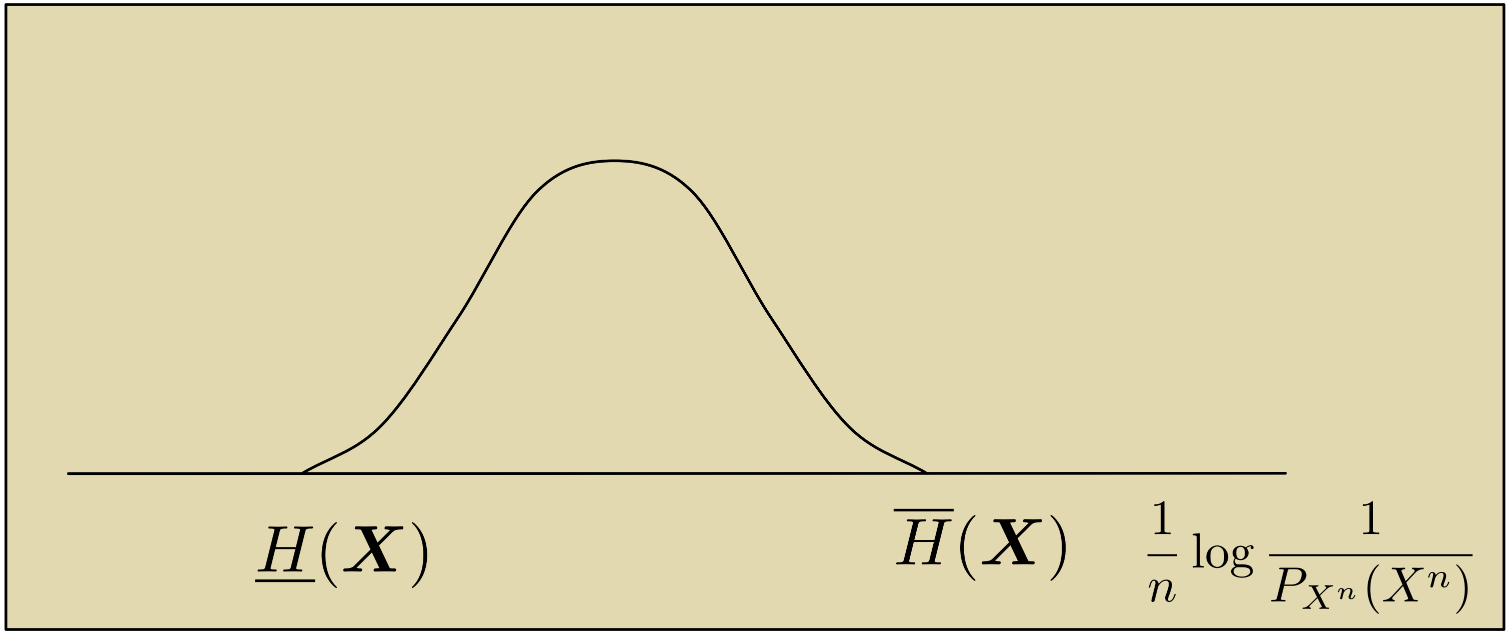
- (Definition) レート R が達成可能である
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 以下を満たす符号 $\boldsymbol{C} = \{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する;

$$\begin{cases} \displaystyle\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M_n \le R \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0. \end{cases}$$

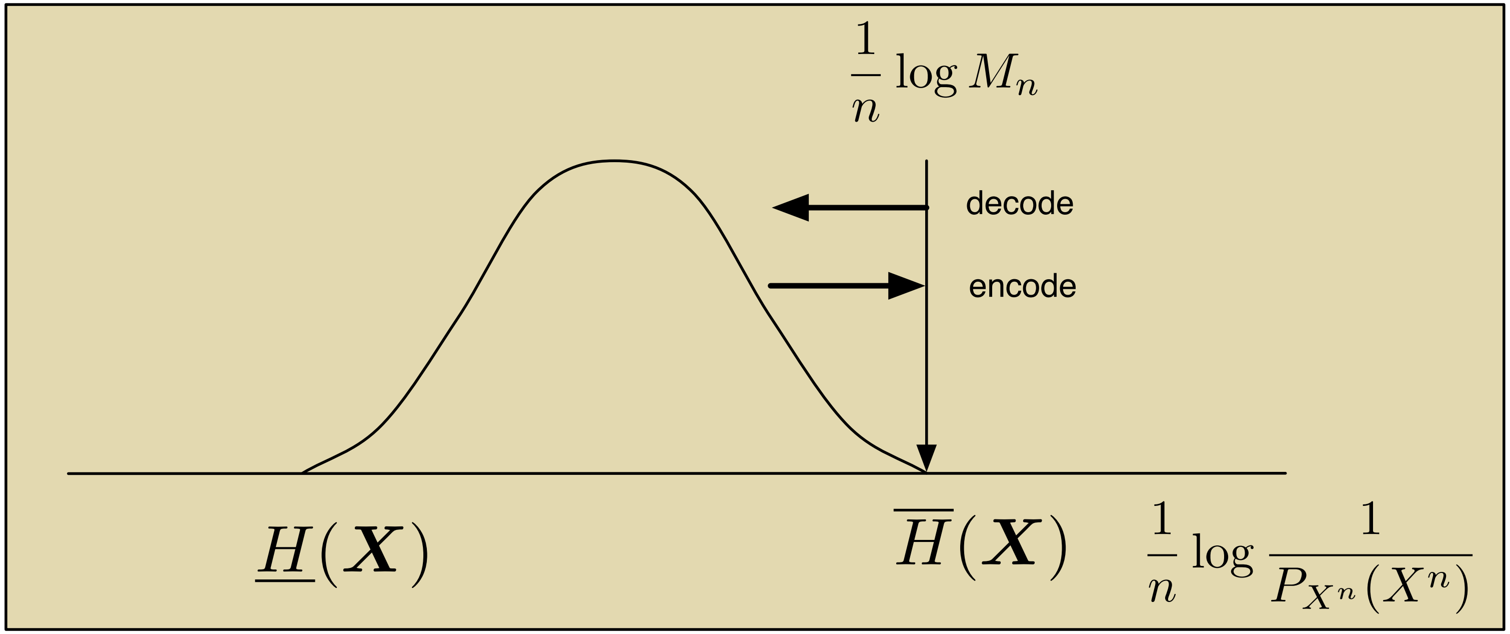
- $R_{rate}(\boldsymbol{X})$ = 達成可能なレート R の下限 (最小達成可能レート)

Theorem 2.1 (Han-Verdú 1993) $R_{rate}(\boldsymbol{X}) = \overline{H}(\boldsymbol{X})$

FF符号の最小達成可能レート



FF符号の最小達成可能レート



FF符号の最小達成可能冗長度

- 冗長度 $=$ レート $-$ 自己情報量 (理想符号語長):

$$\frac{1}{n}\log M_n - \frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)}$$

- (Definition) 冗長度 R が 達成可能である

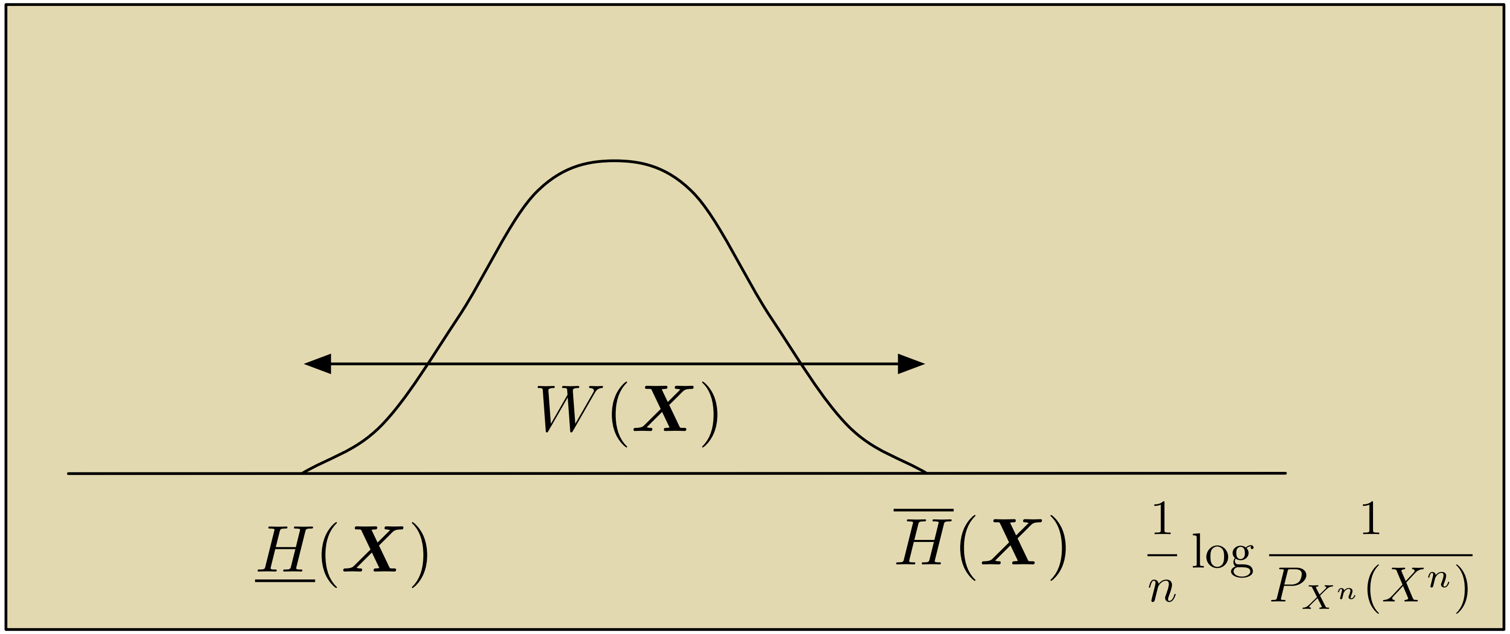
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 以下を満たす符号 $\boldsymbol{C} = \{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する;

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log M_n - \frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \le R+\gamma\right\} = 1 \quad \forall\gamma > 0, \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0. \end{cases}$$

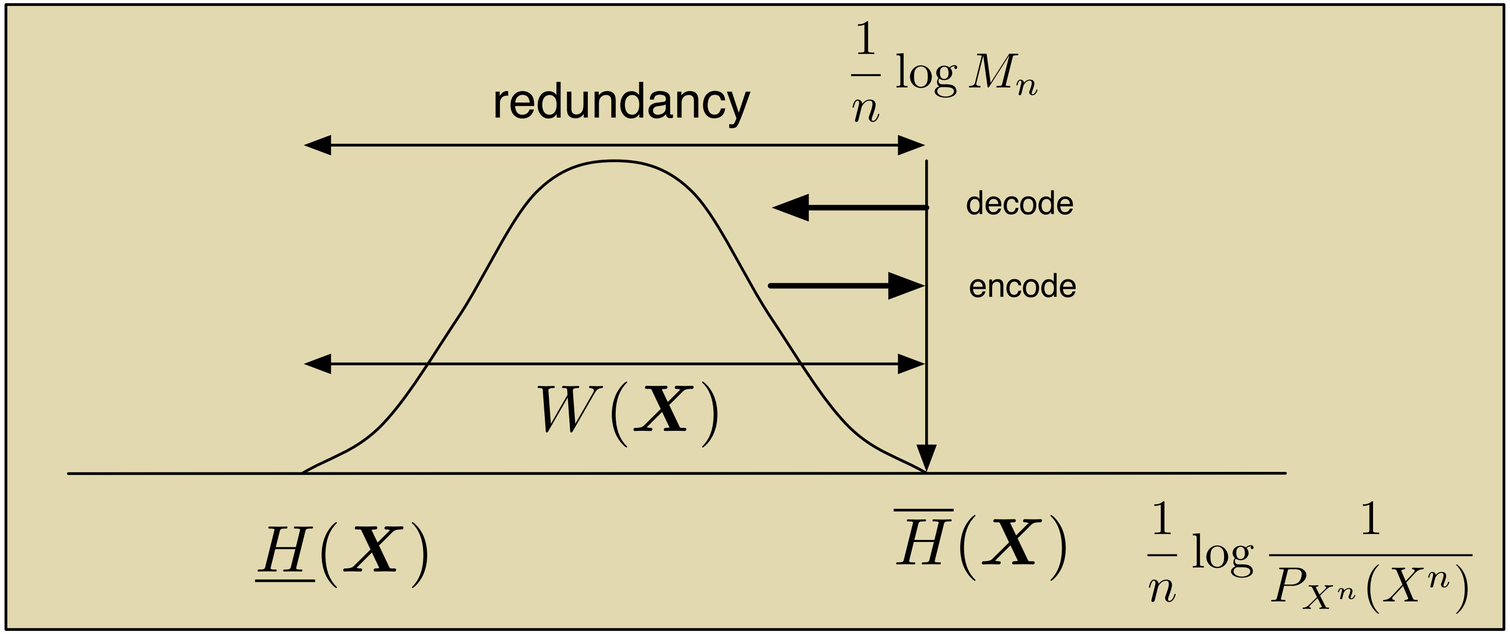
- $R_{red}(\boldsymbol{X}) =$ 達成可能な冗長度 R の下限 (最小達成可能冗長度)

Theorem 2.2 (Arimura-Koga-Iwata 2013) $R_{red}(\boldsymbol{X}) = W(\boldsymbol{X})$

FF 符号の最小達成可能冗長度

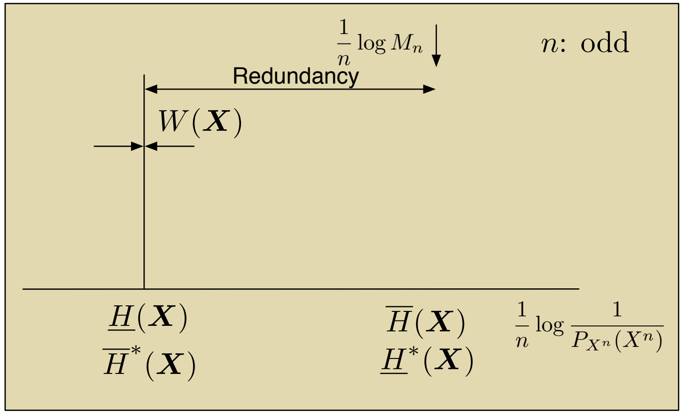


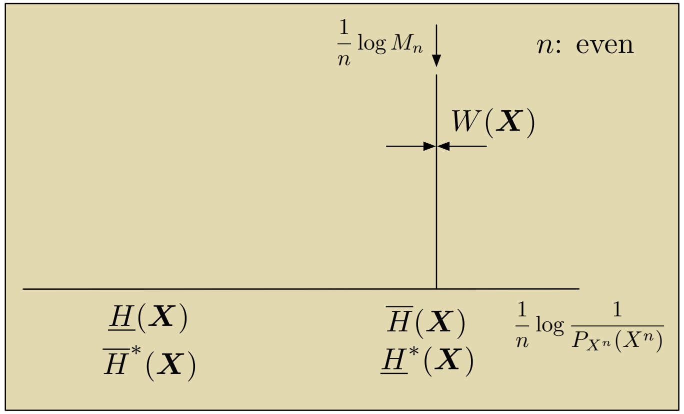
FF 符号の最小達成可能冗長度



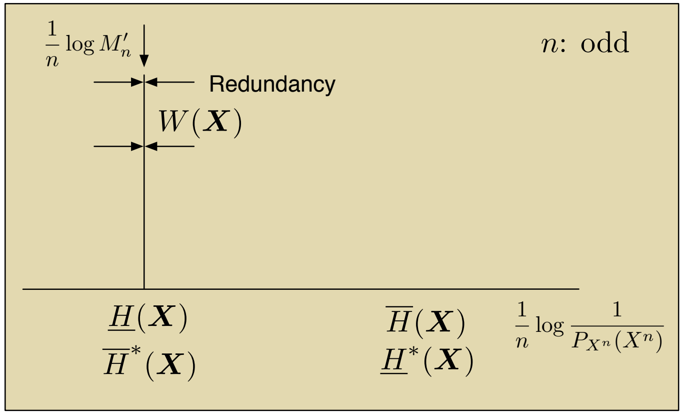
レートと冗長度の違い (*Example 2.3* の情報源)

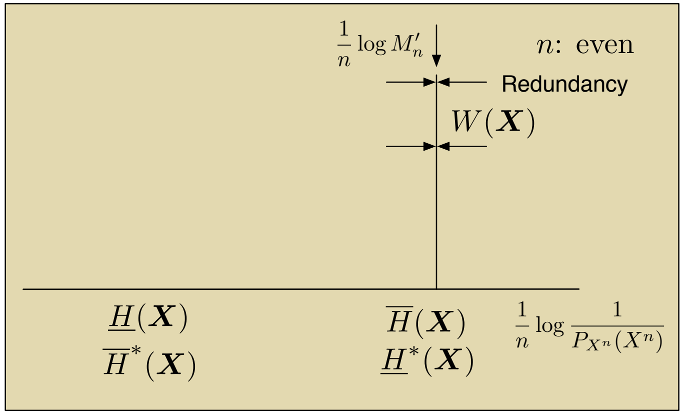
- レートで最適だが冗長度で最適でない符号の例:





- レートでも冗長度で最適な符号の例:





FF符号の最悪冗長度

- 正しく復号できる系列の集合:
$$\mathcal{D}_n = \{x^n \in \mathcal{X}^n : x^n = \psi_n(\varphi_n(x^n))\}$$
- 最悪冗長度 = レート − 理想符号語長の $\mathcal{D}_n$ 内での最大値:
$$\max_{x^n \in \mathcal{D}_n} \left\{ \frac{1}{n}\log M_n - \frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(x^n)} \right\}$$
- (Definition) 最悪冗長度 R が 達成可能である
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 以下を満たす符号 $\boldsymbol{C} = \{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する;
$$\begin{cases} \displaystyle\limsup_{n\to\infty} \max_{x^n \in \mathcal{D}_n} \left\{ \frac{1}{n}\log M_n - \frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(x^n)} \right\} \le R, \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0. \end{cases}$$
- $R_{worst}(\boldsymbol{X})$ = 達成可能な最悪冗長度 R の下限

Theorem 2.3 (Koga-Arimura-Iwata 2011) $R_{worst}(\boldsymbol{X}) = W(\boldsymbol{X})$

【後半の話】

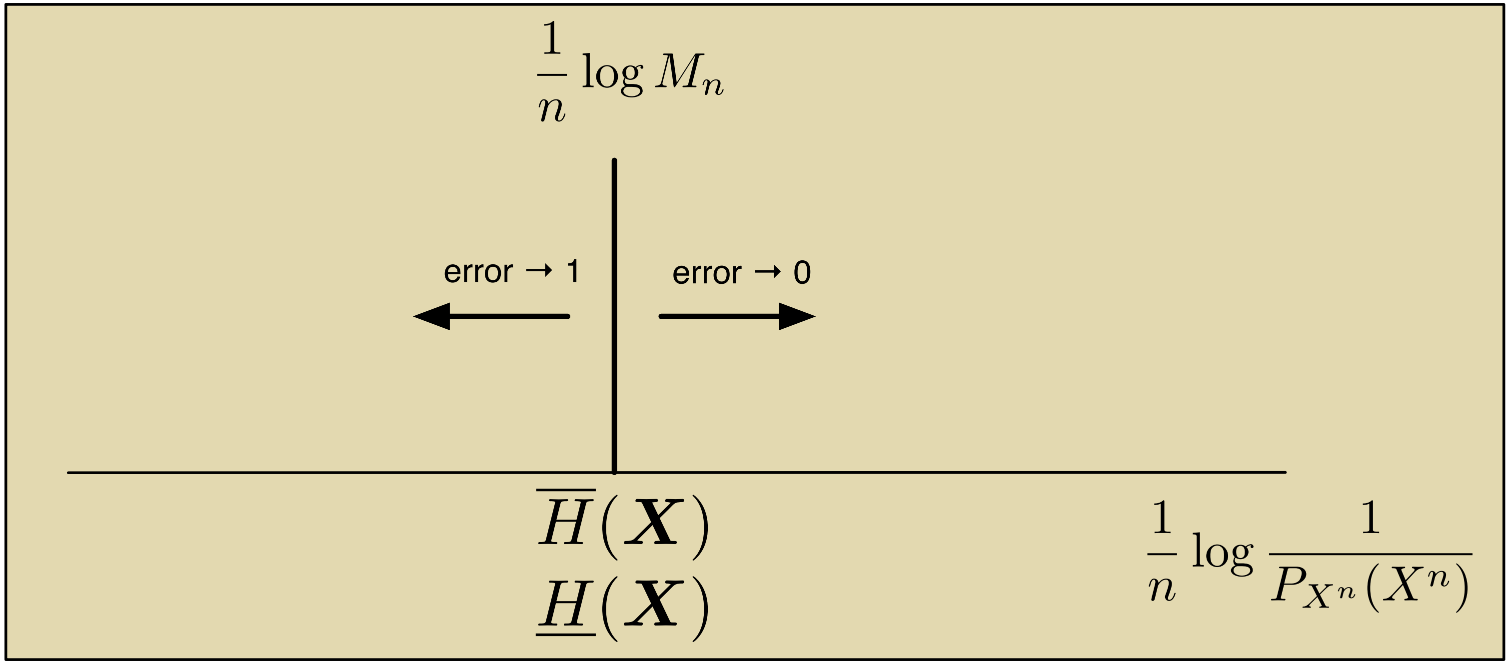
様々な情報スペクトル量を組み合わせて用いることで,

情報スペクトルの「動き」を観察する.

3. (復習) $\overline{H}(\boldsymbol{X})$ と $\underline{H}(\boldsymbol{X})$ の組み合わせ

$\overline{H}(\boldsymbol{X})$ と $\underline{H}(\boldsymbol{X})$ の組み合わせ *(1)*

- $\overline{H}(\boldsymbol{X}) = \underline{H}(\boldsymbol{X})$ の情報スペクトル量としての意味:
  エントロピースペクトルが収束する点

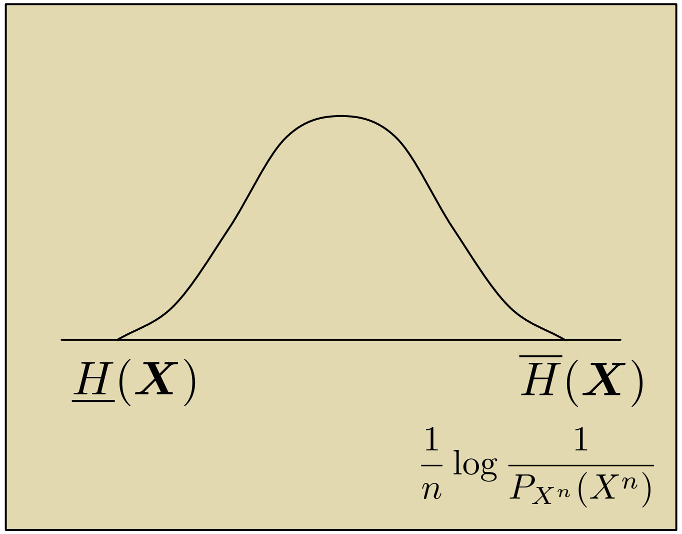


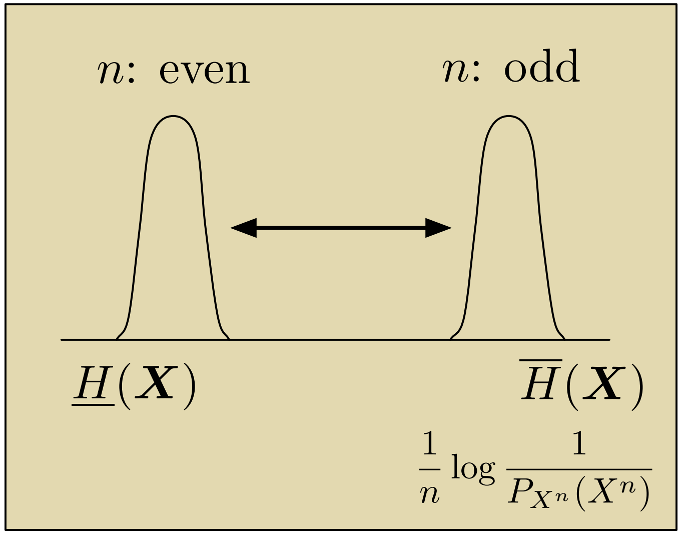
- 操作的な意味: FF 符号で強逆性が成立

$\overline{H}(\boldsymbol{X})$ と $\underline{H}(\boldsymbol{X})$ の組み合わせ (2)

- $\overline{H}(\boldsymbol{X}) < \underline{H}(\boldsymbol{X})$ の情報スペクトル量としての意味:

  1. エントロピースペクトルが幅を持つ (非エルゴード情報源)
  2. エントロピースペクトルが振動する (非定常情報源)





- 操作的な意味: FF 符号で強逆性が成立しない

もう少し細かく見られないか？$\Longrightarrow \overline{H}^*(\boldsymbol{X})$ と $\underline{H}^*(\boldsymbol{X})$

4. $\overline{H}(\boldsymbol{X})$ と $\overline{H}^*(\boldsymbol{X})$ の組み合わせ

定常無記憶情報源に対する *FF* 符号の最適レート

- 一般情報源の場合:

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M_n \le \overline{H}(\boldsymbol{X})$$

(最適な符号の符号化レートの上極限が
スペクトル上エントロピーレート)

- 定常無記憶情報源の場合:

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M_n = H(X) = \overline{H}(\boldsymbol{X}) = \underline{H}(\boldsymbol{X})$$

(最適な符号の符号化レートはエントロピーに収束する)

- では，全ての最適な符号の符号化レートが収束する条件は?

$\overline{H}^*(\boldsymbol{X})$ と楽観的に達成可能なレート *(Chen-Alajaji 1999)*

- (Definition)
  レート R が楽観的に達成可能である
  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $\delta > 0$ と $\tau > 0$ に対して，可算無限個の n で以下を満たす符号 $\boldsymbol{C} = \{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する;
  $$\begin{cases} \dfrac{1}{n}\log M_n \le R + \delta, \\ \varepsilon_n \le \tau. \end{cases}$$
- $\underline{T}(\boldsymbol{X}) =$ 楽観的に達成可能なレート R の下限

Theorem 4.1 (Chen-Alajaji 1999) $\underline{T}(\boldsymbol{X}) = \overline{H}^*(\boldsymbol{X})$.

$\underline{H}^*(\boldsymbol{X})$ と強楽観的に達成可能なレート

- (Definition)
  レート R が強楽観的に達成可能である
  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 部分列 $\{n_i\}_{i\geq 1}$ に対して以下を満たす符号
  $\boldsymbol{C} = \{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する;
  $$\begin{cases} \limsup_{i\to\infty} \dfrac{1}{n_i} \log M_{n_i} \leq R, \\ \lim_{i\to\infty} \varepsilon_{n_i} = 0. \end{cases}$$
- $\underline{T}^*(\boldsymbol{X}) =$ 強楽観的に達成可能なレート R の下限

Theorem 4.2 (Arimura-Koga-Iwata 2013) $\underline{T}^*(\boldsymbol{X}) = \overline{H}^*(\boldsymbol{X})$.

最適な *FF* 符号の性質

Theorem 4.3 (Arimura-Koga-Iwata 2013) 情報源 $\boldsymbol{X}$ に対する全ての $\overline{H}$-最適な符号が

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M_n = \overline{H}(\boldsymbol{X}) \text{ を満たす}$$

$\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{X}$ が $\overline{H}(\boldsymbol{X}) = \overline{H}^*(\boldsymbol{X})$ を満たす.

- $\overline{H}$-最適な符号:

$$\begin{cases} \limsup_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \log M_n \le \overline{H}(\boldsymbol{X}), \\ \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0. \end{cases}$$

- エントロピースペクトルの動きを見ることができる.

5. $W(\boldsymbol{X})$ の上下界を用いる場合

スペクトルの幅の上下界

- 以下の上界，下界が成立:

$$W(\boldsymbol{X}) \le \overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}(\boldsymbol{X}),$$

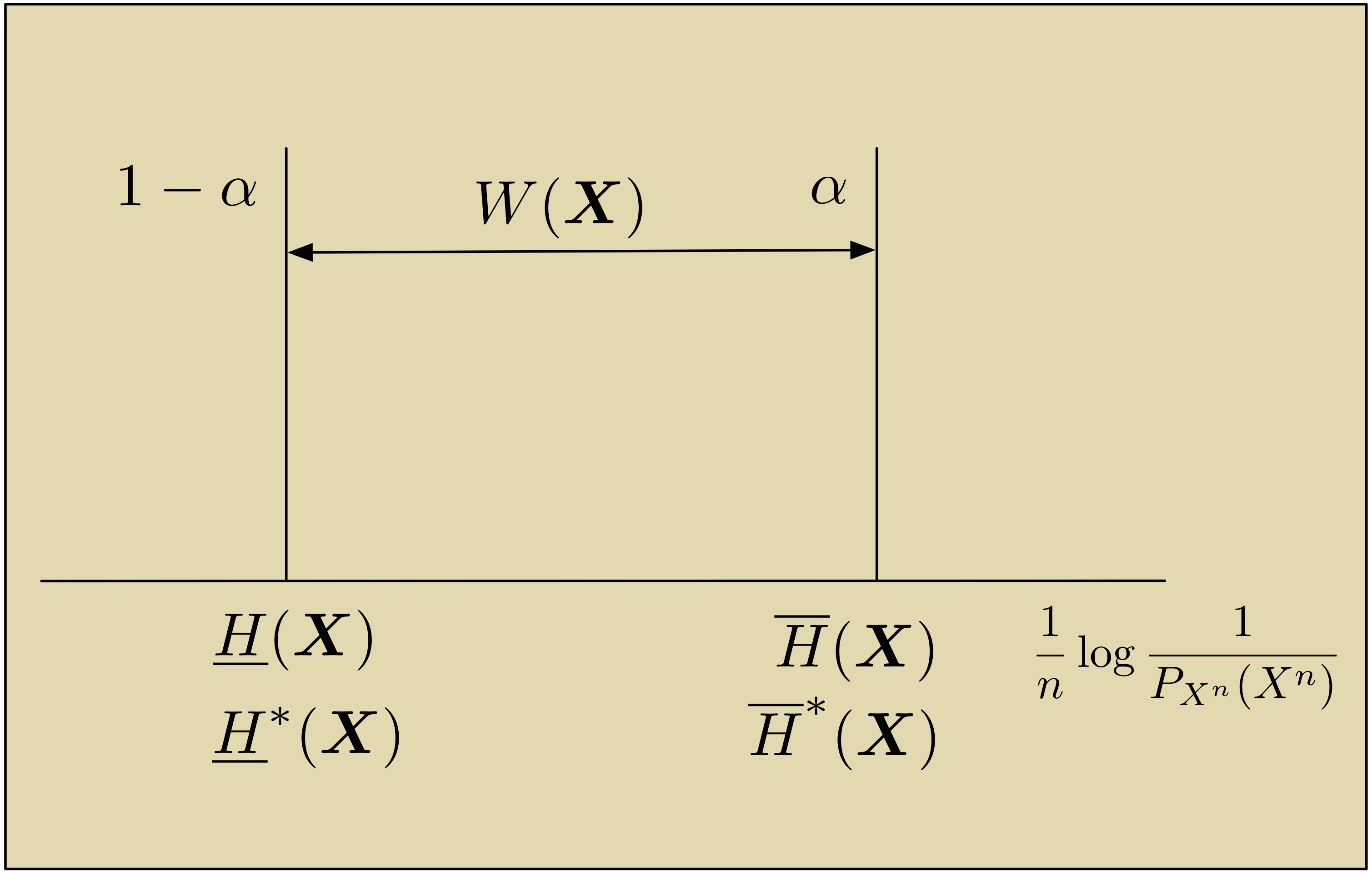
$$W(\boldsymbol{X}) \ge \overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}^*(\boldsymbol{X}),$$

$$W(\boldsymbol{X}) \ge \overline{H}^*(\boldsymbol{X}) - \underline{H}(\boldsymbol{X}).$$

$\Longrightarrow$ Examples 5.1–5.4

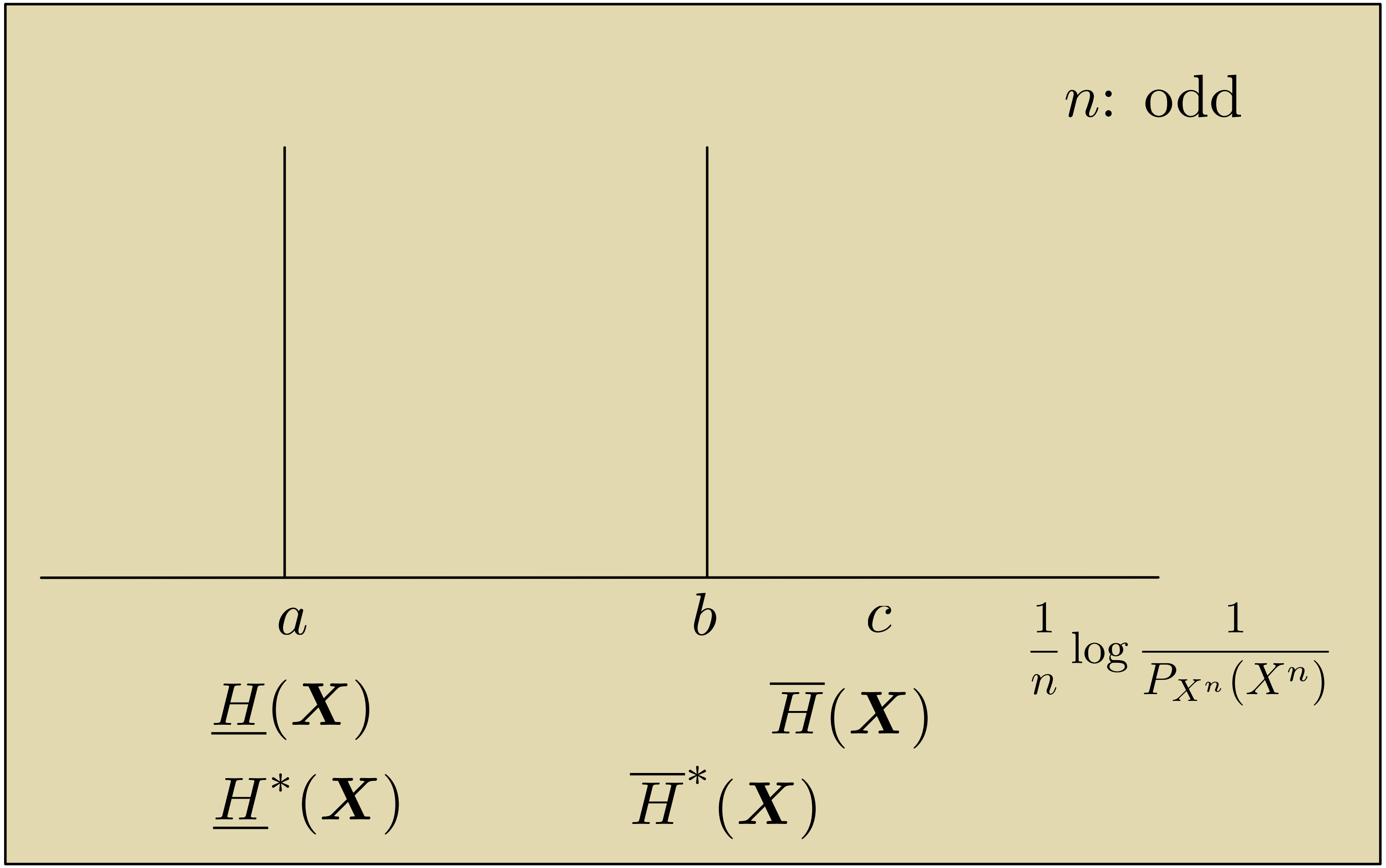
Example 5.1

$(\overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}^*(\boldsymbol{X}) = W(\boldsymbol{X}) = \overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}(\boldsymbol{X}))$

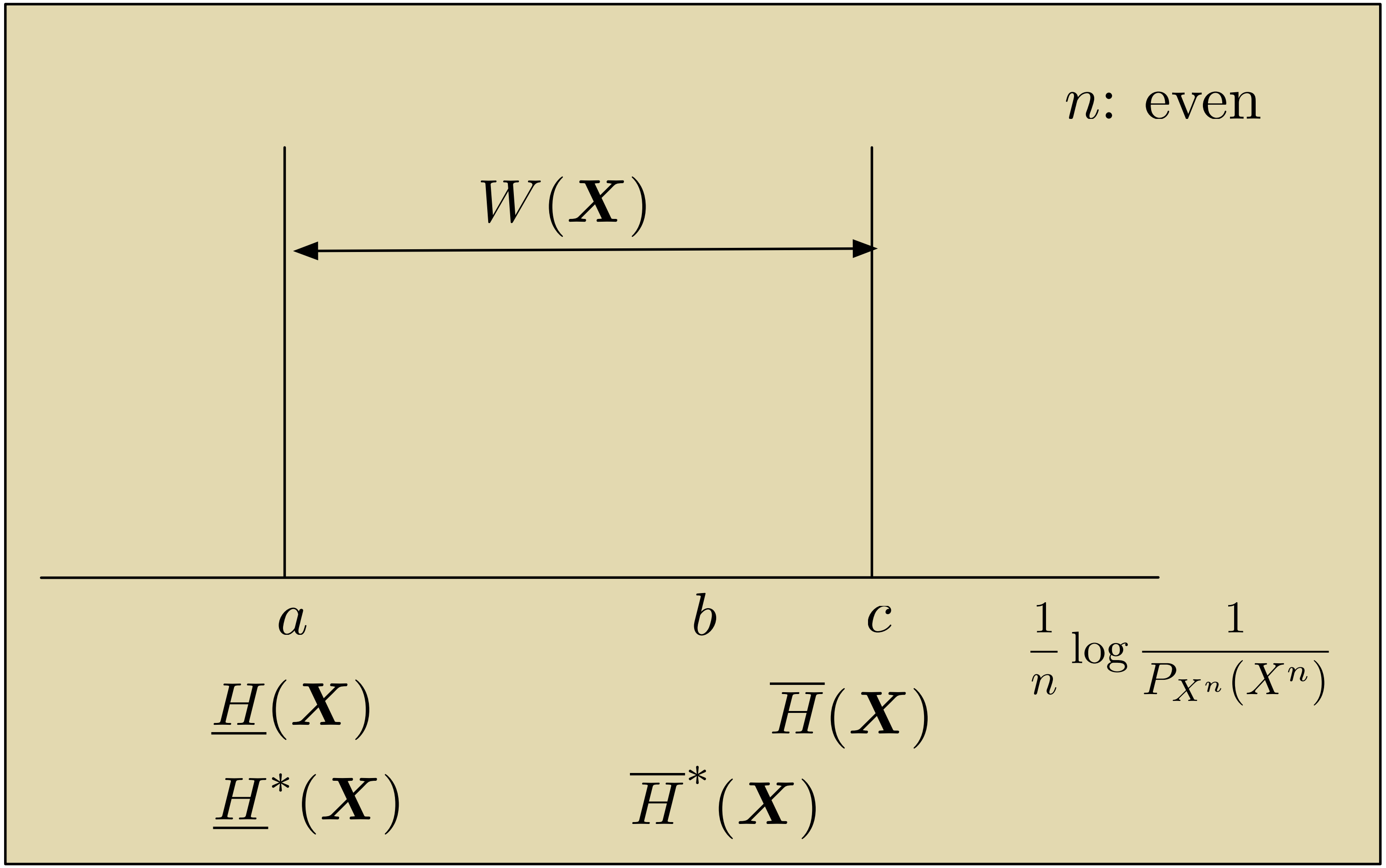


Example 5.2

$(\overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}^*(\boldsymbol{X}) = W(\boldsymbol{X}) = \overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}(\boldsymbol{X}))$

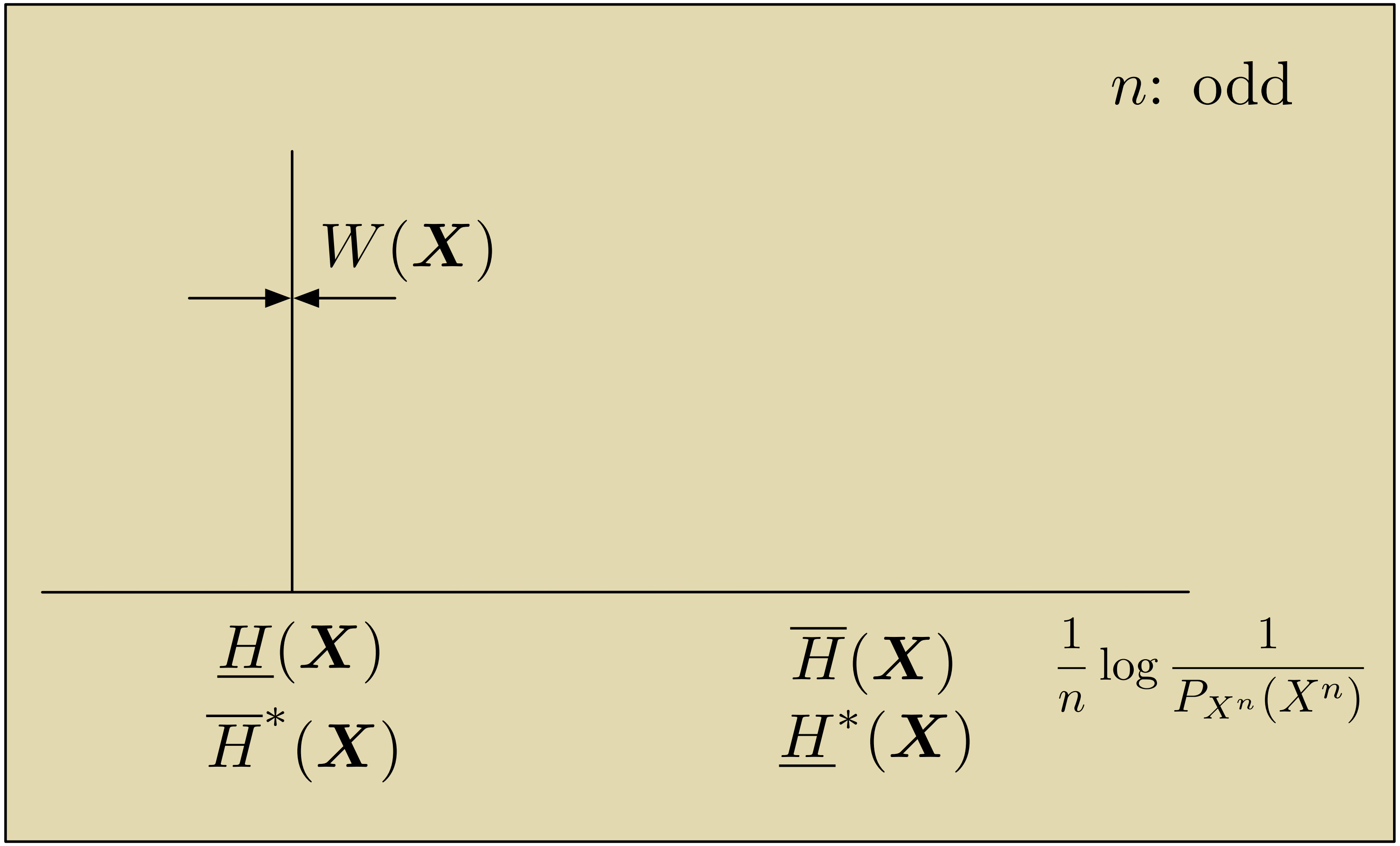


Example 5.2
$(\overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}^*(\boldsymbol{X}) = W(\boldsymbol{X}) = \overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}(\boldsymbol{X}))$

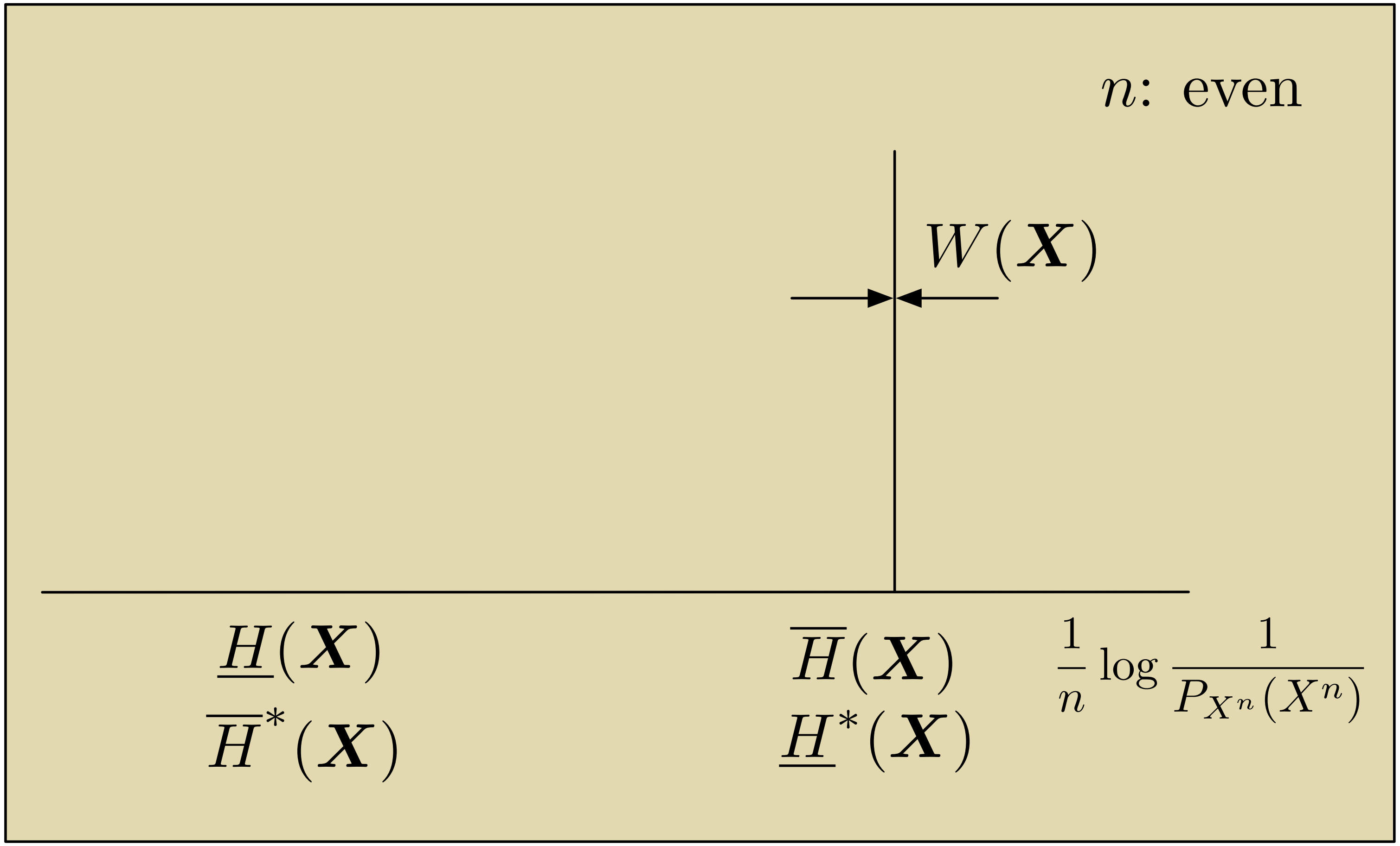


Example 5.3

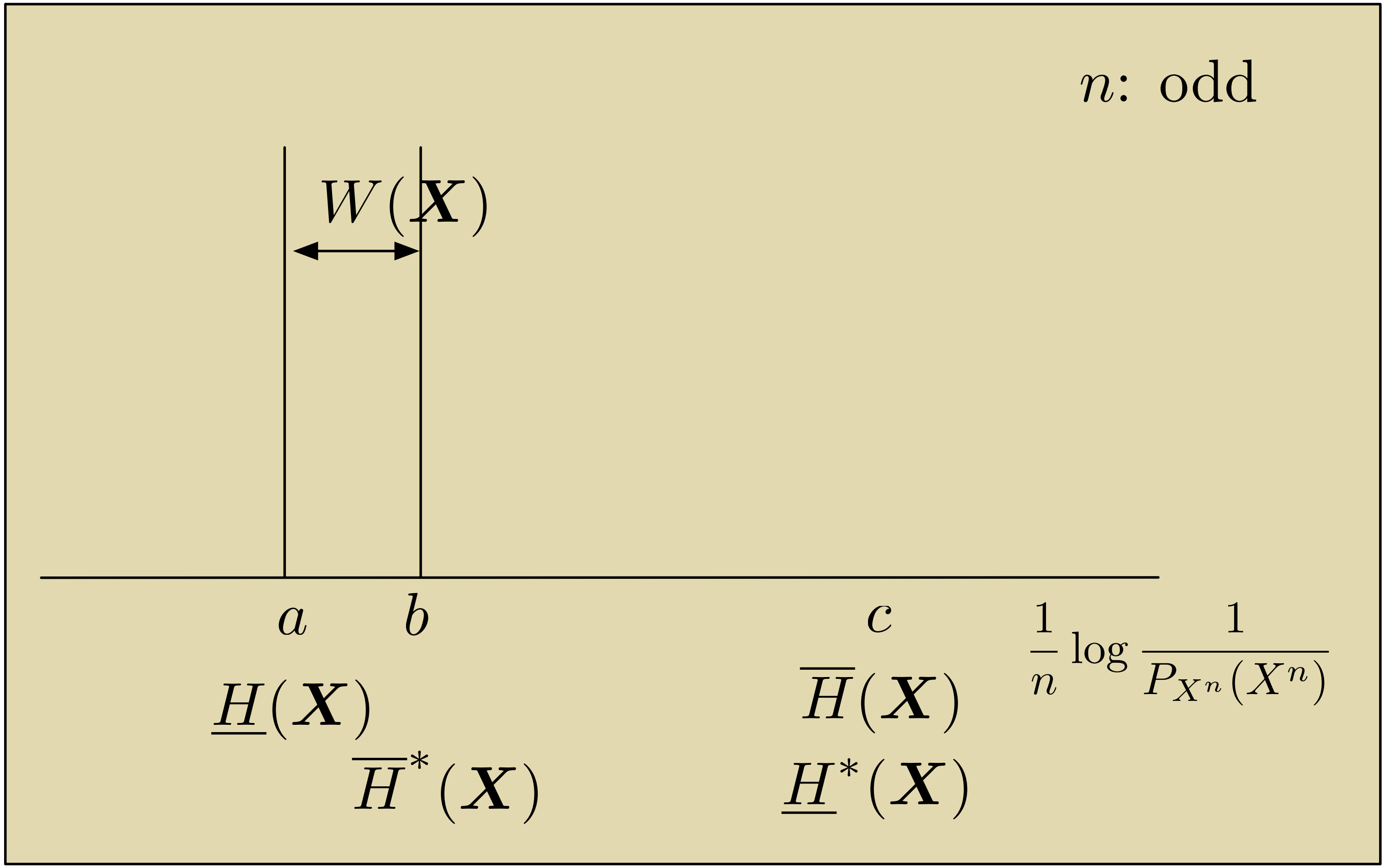
$(\overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}^*(\boldsymbol{X}) = W(\boldsymbol{X}) < \overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}(\boldsymbol{X}))$



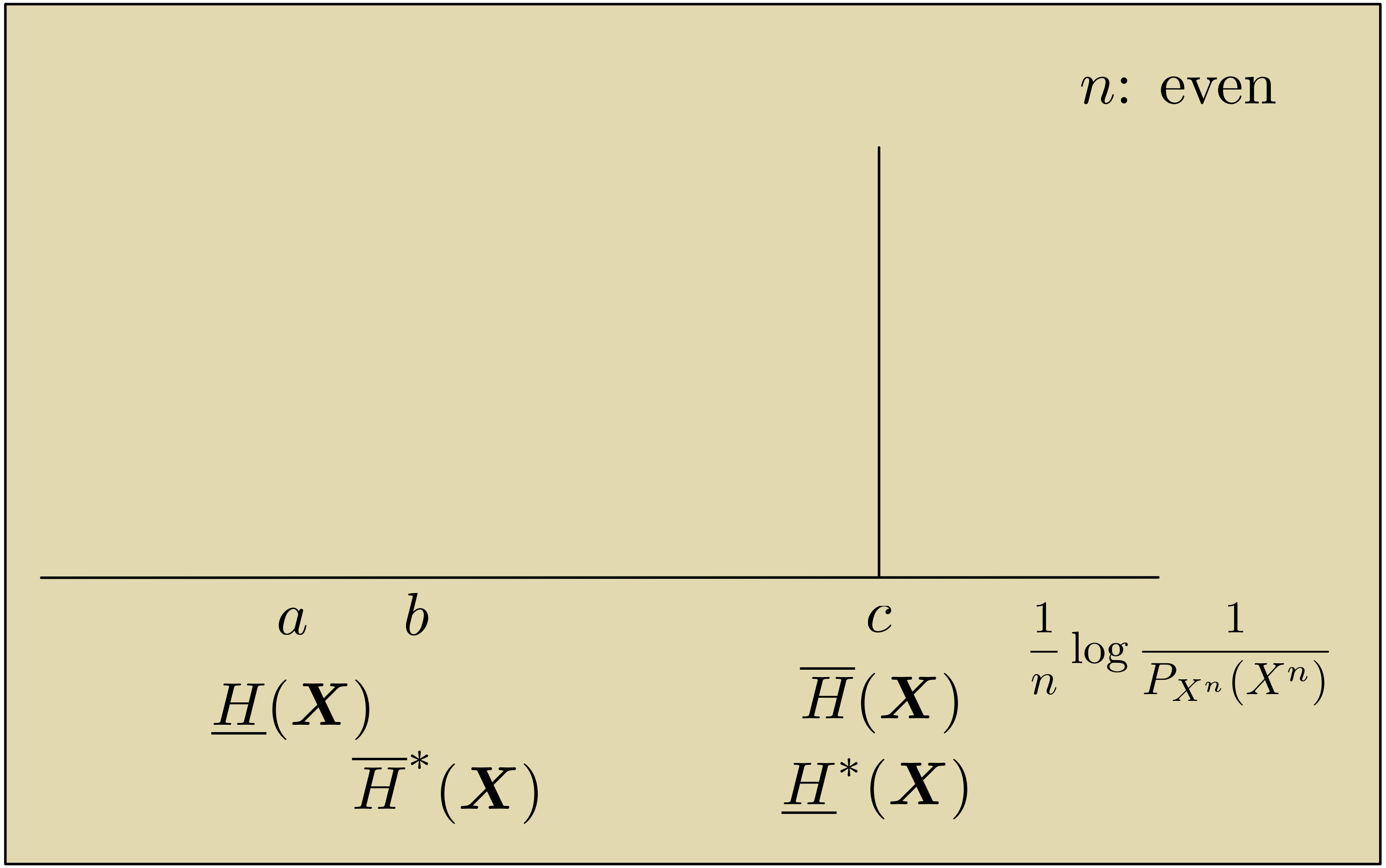
Example 5.3
$(\overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}^*(\boldsymbol{X}) = W(\boldsymbol{X}) < \overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}(\boldsymbol{X}))$



Example 5.4
$(\overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}^*(\boldsymbol{X}) < W(\boldsymbol{X}) < \overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}(\boldsymbol{X}))$



Example 5.4 $(\overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}^*(\boldsymbol{X}) < W(\boldsymbol{X}) < \overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}(\boldsymbol{X}))$



情報源の例

- 定常無記憶情報源, 定常エルゴード情報源:
  $\underline{H}(\boldsymbol{X}) = \underline{H}^*(\boldsymbol{X}) = \overline{H}^*(\boldsymbol{X}) = \overline{H}(\boldsymbol{X})$,
  $W(\boldsymbol{X}) = 0$.
  エントロピースペクトルが 1 点に収束する.
- 定常情報源:
  $\underline{H}(\boldsymbol{X}) = \underline{H}^*(\boldsymbol{X}) \leq \overline{H}^*(\boldsymbol{X}) = \overline{H}(\boldsymbol{X})$,
  $W(\boldsymbol{X}) = \overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}(\boldsymbol{X})$.
  エントロピースペクトルの両端がそれぞれ収束する.
- $\underline{H}(\boldsymbol{X}) = \underline{H}^*(\boldsymbol{X})$:
  エントロピースペクトルの左端が収束することを意味する.
- $\overline{H}(\boldsymbol{X}) = \overline{H}^*(\boldsymbol{X})$:
  エントロピースペクトルの右端が収束することを意味する.

(定義) $\mathcal{C}_{\overline{H}}$: $\overline{H}$-最適 (レート最適) な符号クラス

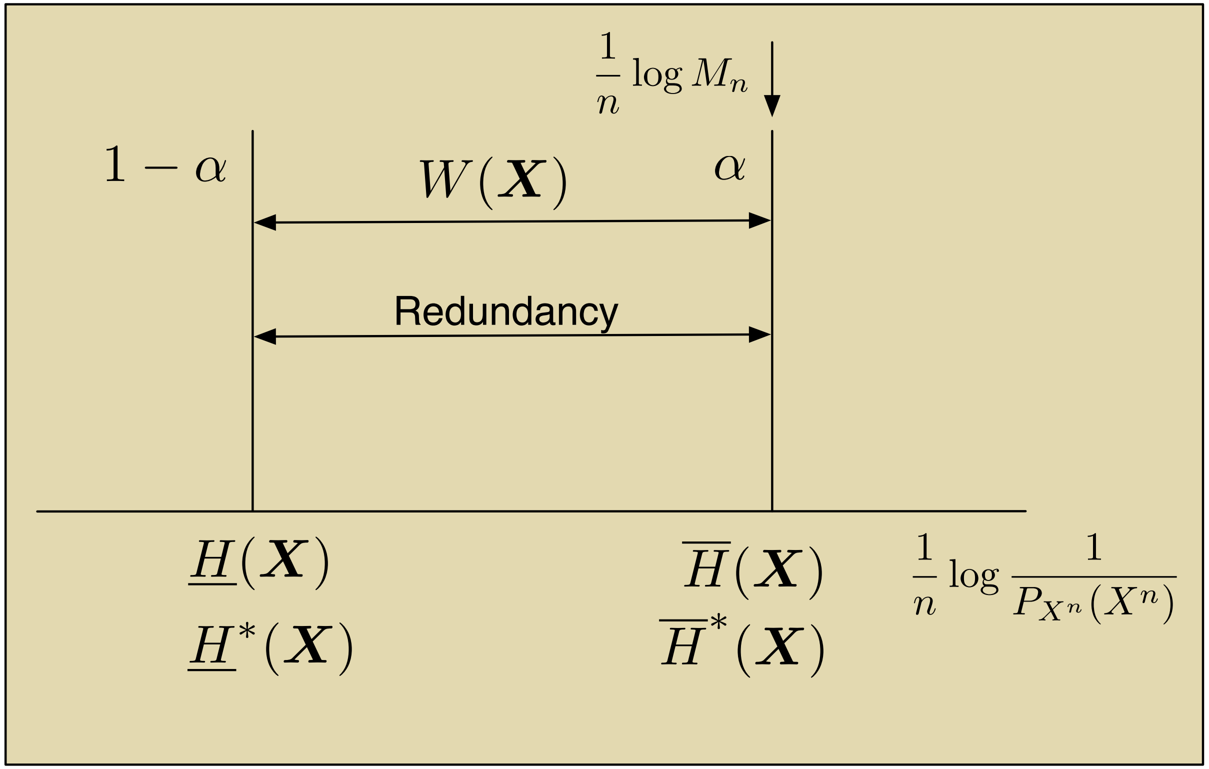
- レート R が 達成可能である
  $\overset{\text{def}}{\iff}$ 以下を満たす符号 $\boldsymbol{C} = \{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する;
  $$\begin{cases} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M_n \le R, \\ \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0. \end{cases}$$
- $R_{rate}(\boldsymbol{X}) =$ 達成可能なレート R の下限
  $\Longrightarrow R_{rate}(\boldsymbol{X}) = \overline{H}(\boldsymbol{X})$ (Han-Verdú, 1993).
- 符号 $\boldsymbol{C} = \{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が $\overline{H}$-最適 (レート最適)
  $\overset{\text{def}}{\iff}$ レート $R = \overline{H}(\boldsymbol{X})$ が符号 $\boldsymbol{C}$ によって達成可能
- $\mathcal{C}_{\overline{H}}(\boldsymbol{X}) =$ 情報源 $\boldsymbol{X}$ に対して $\overline{H}$-最適 (レート最適) な符号のクラス

(定義) $\mathcal{C}_W$: W-最適 (冗長度最適) な符号クラス

- 冗長度 $=$ レート $-$ 理想符号化レート
- 冗長度 R が 達成可能である
  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 以下を満たす符号 $\boldsymbol{C} = \{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する;
  $$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \Pr\left\{ \dfrac{1}{n}\log M_n - \dfrac{1}{n}\log\dfrac{1}{P_{X^n}(X^n)} \le R+\gamma \right\} = 1 \quad \forall\gamma > 0, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0. \end{cases}$$
- $R_{red}(\boldsymbol{X}) =$ 達成可能な冗長度 R の下限
  $\Longrightarrow R_{red}(\boldsymbol{X}) = W(\boldsymbol{X})$
- 符号 $\boldsymbol{C} = \{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が W-最適 (冗長度最適)
  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 冗長度 $R = W(\boldsymbol{X})$ が符号 $\boldsymbol{C}$ によって達成可能
- $\mathcal{C}_W(\boldsymbol{X}) =$ 情報源 $\boldsymbol{X}$ に対して W-最適 (冗長度最適) な符号のクラス

2つの符号クラス $\mathcal{C}_{\overline{H}}$ と $\mathcal{C}_W$ の関係 (予想)

- $\mathcal{C}_{\overline{H}} = \mathcal{C}_W \overset{?}{\Longleftrightarrow} \overline{H}(\boldsymbol{X}) = \overline{H}^*(\boldsymbol{X})$ and $\underline{H}(\boldsymbol{X}) = \underline{H}^*(\boldsymbol{X})$



- 右辺の条件は全ての定常情報源を含むクラス.
- 実は $\Longleftarrow$ のみが成立.

2つの符号クラス $\mathcal{C}_{\overline{H}}$ と $\mathcal{C}_W$ の包含関係 (結果)

- $W(\boldsymbol{X})$ の上界と下界 (Koga 2000, 2001, 2011) を用いる:

$$\overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}^*(\boldsymbol{X}) \leq W(\boldsymbol{X}) \leq \overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}(\boldsymbol{X})$$

- 結果: (全ての関係は 必要十分である)

	$W = \overline{H} - \underline{H}^*$	$W > \overline{H} - \underline{H}^*$
$W = \overline{H} - \underline{H}$	$\mathcal{C}_W = \mathcal{C}_{\overline{H}}$	$\mathcal{C}_W \supsetneq \mathcal{C}_{\overline{H}}$
$W < \overline{H} - \underline{H}$	$\mathcal{C}_W \subsetneq \mathcal{C}_{\overline{H}}$	$\mathcal{C}_W \cap \mathcal{C}_{\overline{H}} \neq \emptyset$ $\mathcal{C}_W \setminus \mathcal{C}_{\overline{H}} \neq \emptyset$ $\mathcal{C}_{\overline{H}} \setminus \mathcal{C}_W \neq \emptyset$

- 上記の関係は下記の 3 つと同値である;

1. $\mathcal{C}_{\overline{H}}(\boldsymbol{X}) \subseteq \mathcal{C}_W(\boldsymbol{X}) \iff W(\boldsymbol{X}) = \overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}(\boldsymbol{X})$ (上界)
2. $\mathcal{C}_W(\boldsymbol{X}) \subseteq \mathcal{C}_{\overline{H}}(\boldsymbol{X}) \iff W(\boldsymbol{X}) = \overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}^*(\boldsymbol{X})$ (下界)
3. $\mathcal{C}_W(\boldsymbol{X}) \cap \mathcal{C}_{\overline{H}}(\boldsymbol{X}) \neq \emptyset$

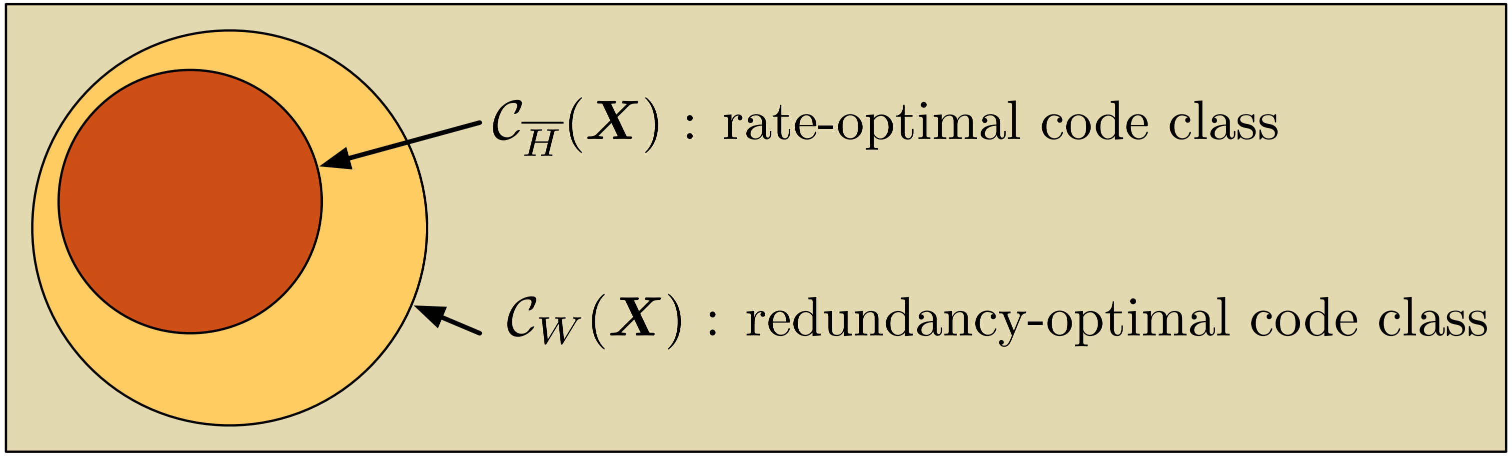
$\mathcal{C}_{\overline{H}}(\boldsymbol{X}) \subseteq \mathcal{C}_W(\boldsymbol{X}) \iff W(\boldsymbol{X}) = \overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}(\boldsymbol{X})$

Theorem 5.1 $W(\boldsymbol{X}) = \overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}(\boldsymbol{X}) \Longrightarrow \mathcal{C}_{\overline{H}}(\boldsymbol{X}) \subseteq \mathcal{C}_W(\boldsymbol{X})$

「情報源 $\boldsymbol{X}$ が $W(\boldsymbol{X}) = \overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}(\boldsymbol{X})$ を満たすなら,
$\boldsymbol{X}$ に対する全てのレート最適な符号は冗長度最適である」

Theorem 5.2 $\mathcal{C}_{\overline{H}}(\boldsymbol{X}) \subseteq \mathcal{C}_W(\boldsymbol{X}) \Longrightarrow W(\boldsymbol{X}) = \overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}(\boldsymbol{X})$

「情報源 $\boldsymbol{X}$ に対する全てのレート最適な符号が冗長度最適なら,
$\boldsymbol{X}$ は $W(\boldsymbol{X}) = \overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}(\boldsymbol{X})$ を満たす」



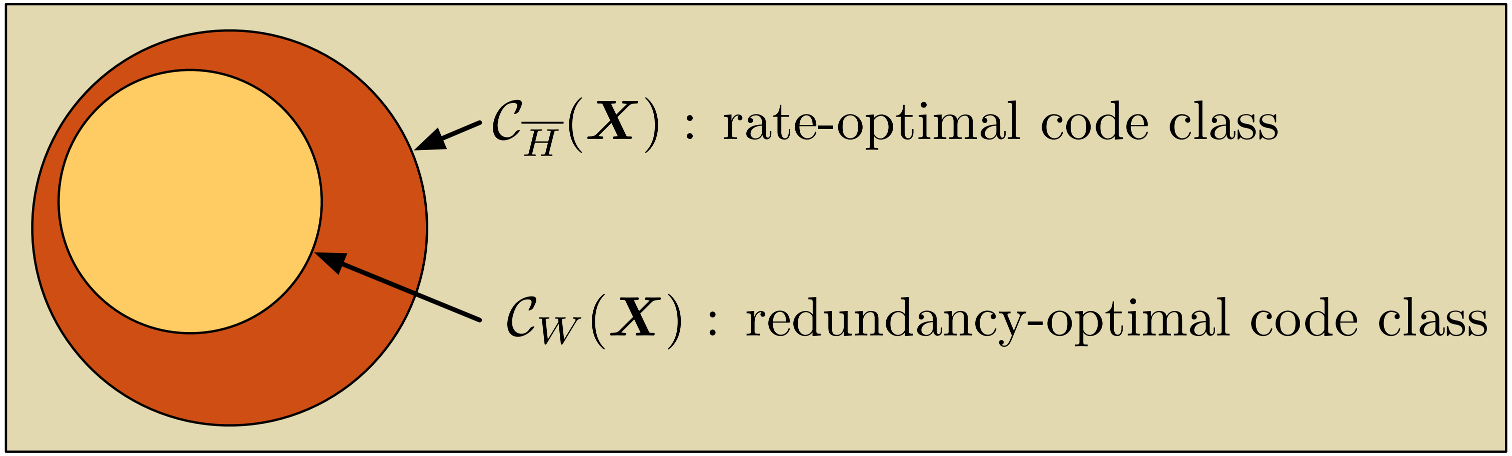
$\mathcal{C}_W(\boldsymbol{X}) \subseteq \mathcal{C}_{\overline{H}}(\boldsymbol{X}) \Longleftrightarrow W(\boldsymbol{X}) = \overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}^*(\boldsymbol{X})$

Theorem 5.3 $\quad W(\boldsymbol{X}) = \overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}^*(\boldsymbol{X}) \Longrightarrow \mathcal{C}_W(\boldsymbol{X}) \subseteq \mathcal{C}_{\overline{H}}(\boldsymbol{X})$

「情報源 $\boldsymbol{X}$ が $W(\boldsymbol{X}) = \overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}^*(\boldsymbol{X})$ を満たすなら,
$\boldsymbol{X}$ に対する全ての冗長度最適な符号はレート最適である」

Theorem 5.4 $\quad \mathcal{C}_W(\boldsymbol{X}) \subseteq \mathcal{C}_{\overline{H}}(\boldsymbol{X}) \Longrightarrow W(\boldsymbol{X}) = \overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}^*(\boldsymbol{X})$

「情報源 $\boldsymbol{X}$ に対する全ての冗長度最適な符号がレート最適なら,
$\boldsymbol{X}$ は $W(\boldsymbol{X}) = \overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}^*(\boldsymbol{X})$ を満たす」



$\mathcal{C}_W(\boldsymbol{X}) = \mathcal{C}_{\overline{H}}(\boldsymbol{X}) \Longleftrightarrow \underline{H}(\boldsymbol{X}) = \underline{H}^*(\boldsymbol{X})$

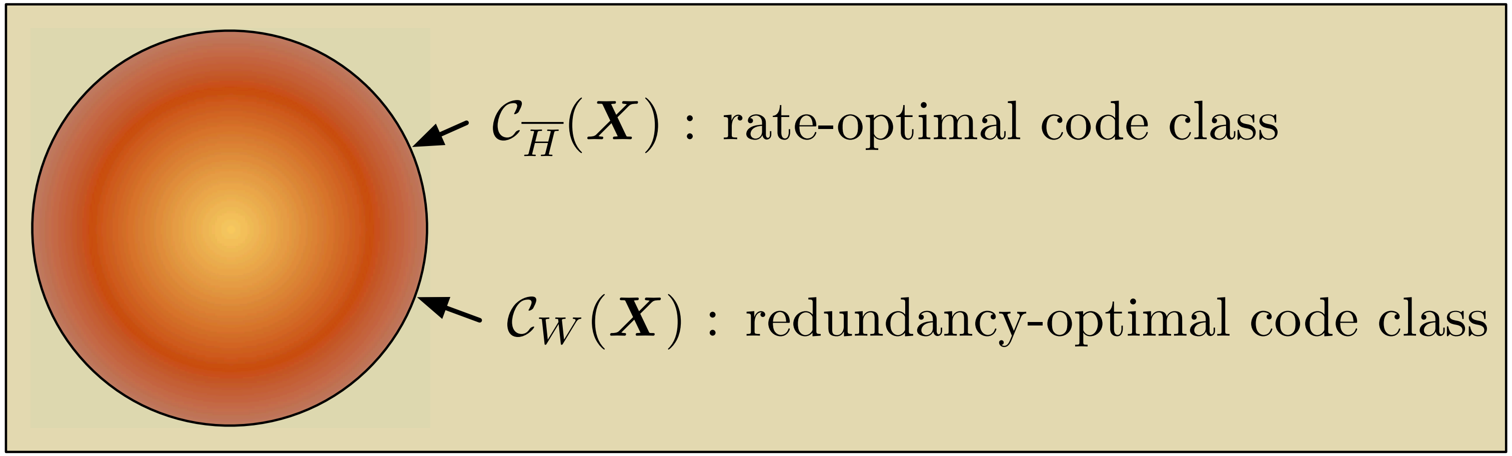
Corollary 5.1 $\mathcal{C}_W(\boldsymbol{X}) = \mathcal{C}_{\overline{H}}(\boldsymbol{X}) \Longleftrightarrow \underline{H}(\boldsymbol{X}) = \underline{H}^*(\boldsymbol{X})$

「情報源 $\boldsymbol{X}$ に対する冗長度最適な符号のクラスとレート最適な符号のクラスが等しいならば，またそのときに限り，$\boldsymbol{X}$ は $\underline{H}(\boldsymbol{X}) = \underline{H}^*(\boldsymbol{X})$ (左端が収束) を満たす」

Proof: $W(\boldsymbol{X}) = \overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}^*(\boldsymbol{X})$ and $W(\boldsymbol{X}) = \overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}(\boldsymbol{X})$

$\Longleftrightarrow \underline{H}(\boldsymbol{X}) = \underline{H}^*(\boldsymbol{X})$.

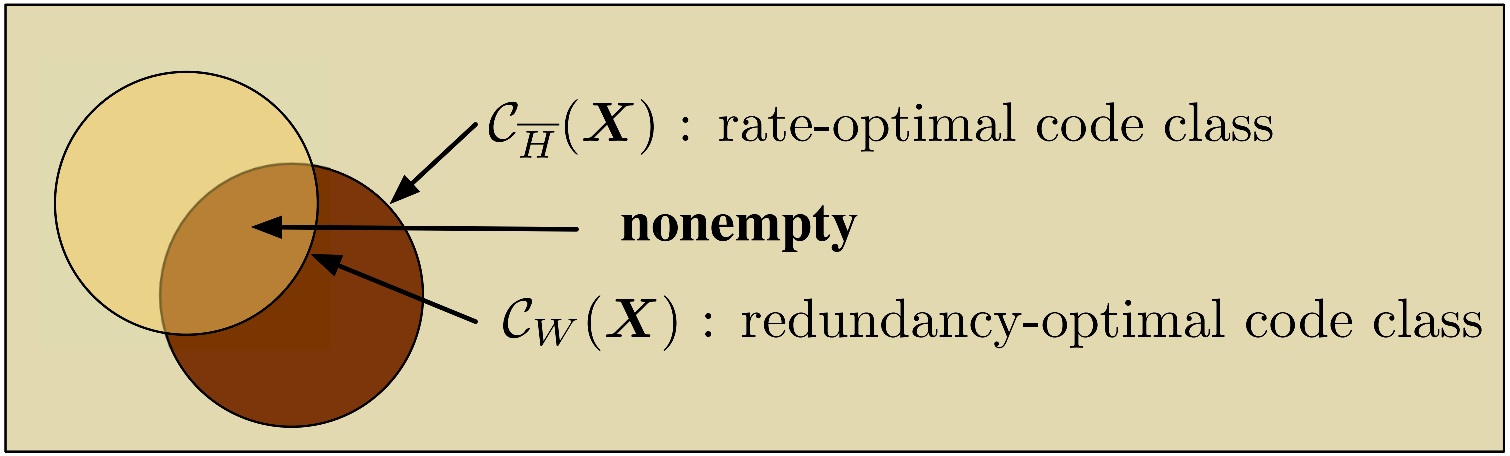
注意: 右辺の条件は定常情報源を含むクラス．



$\mathcal{C}_W(\boldsymbol{X}) \cap \mathcal{C}_{\overline{H}}(\boldsymbol{X}) \neq \emptyset$

Theorem 5.5 $\mathcal{C}_W(\boldsymbol{X}) \cap \mathcal{C}_{\overline{H}}(\boldsymbol{X}) \neq \emptyset$.

「$\overline{H}(\boldsymbol{X}) < \infty$ を満たす任意の情報源 $\boldsymbol{X}$ に対して,
$\overline{H}$-最適かつ W-最適な FF 符号が存在する」

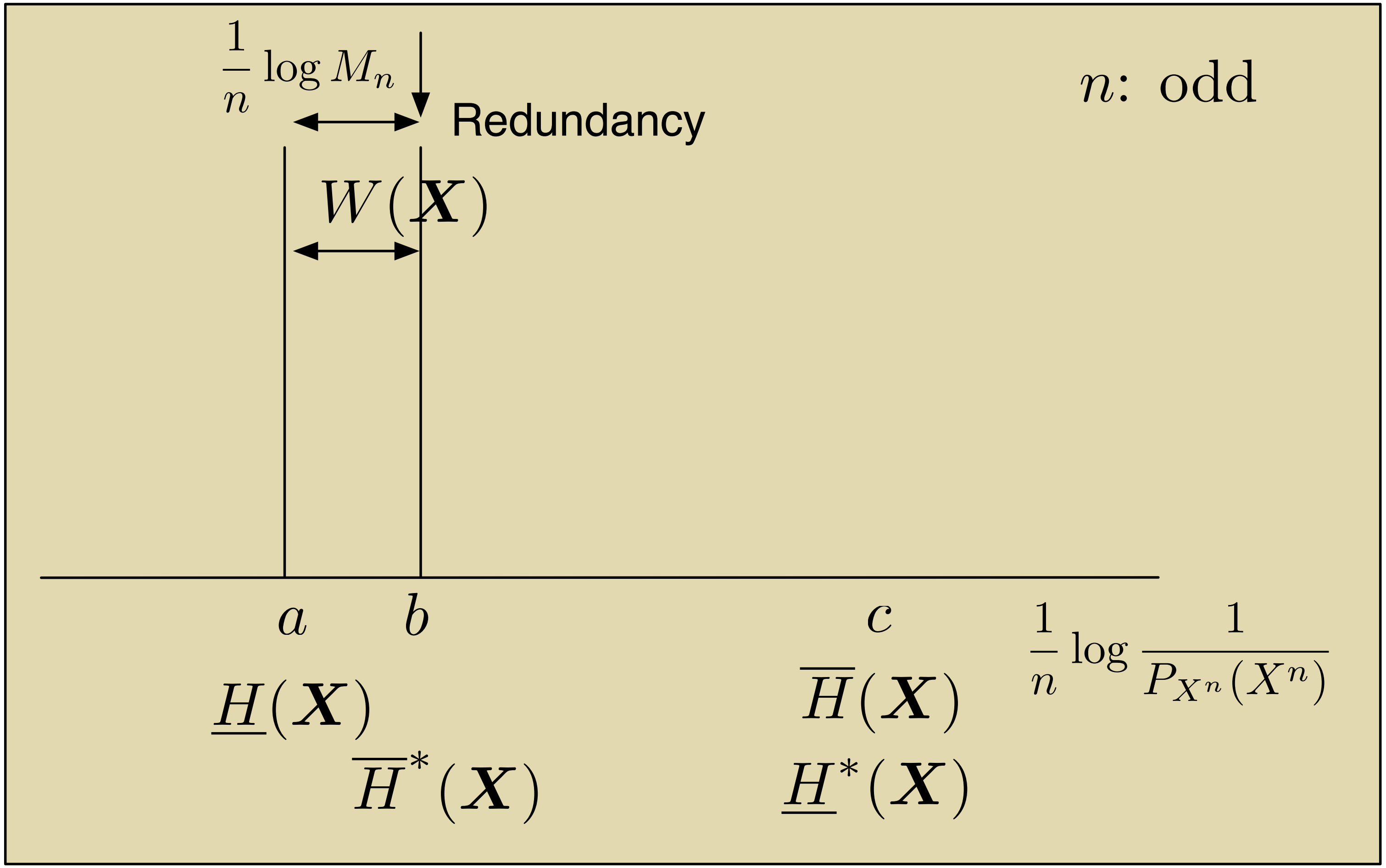


符号の例

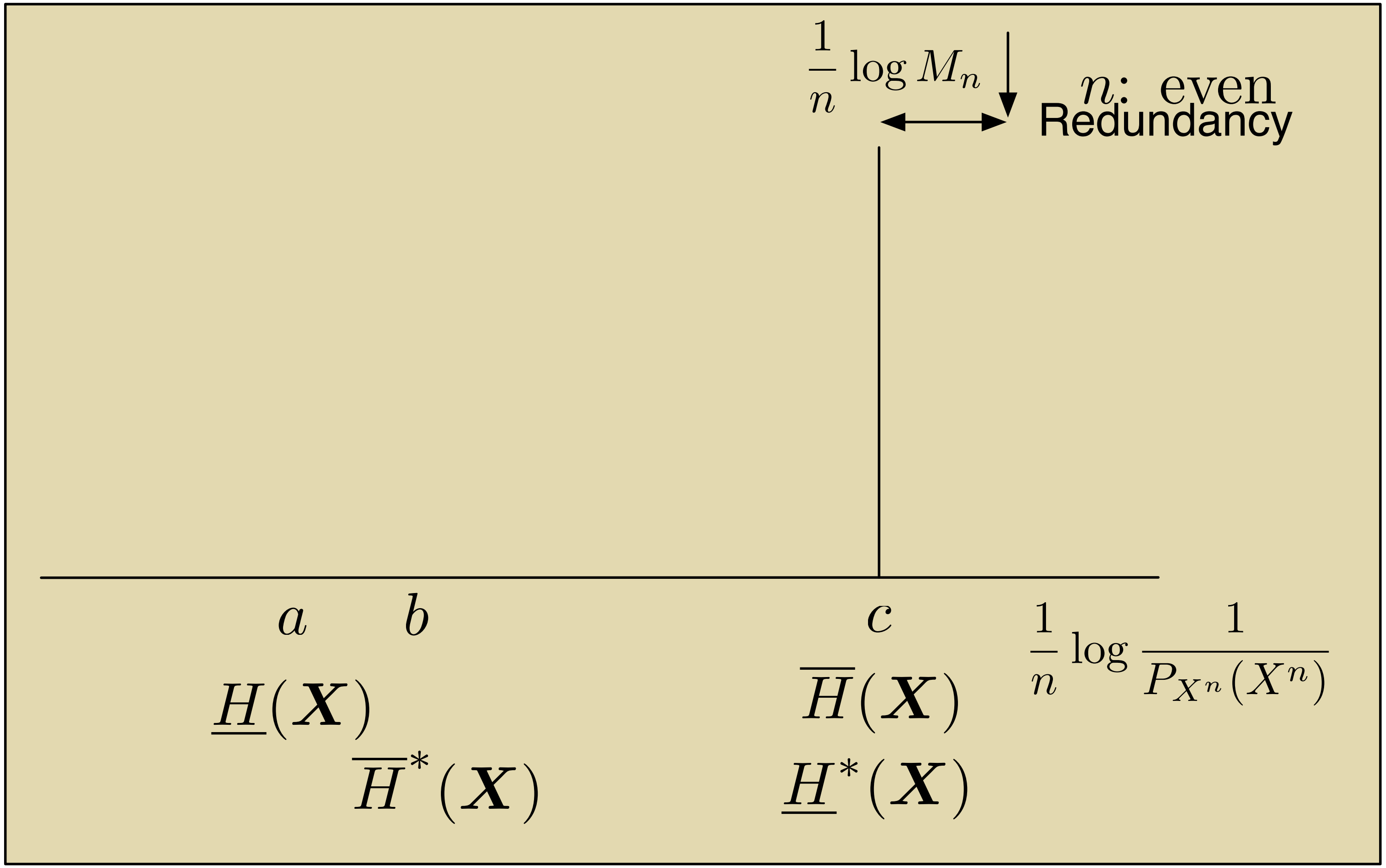
- 情報源: Example 2.4
- $\overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}^*(\boldsymbol{X}) < W(\boldsymbol{X}) < \overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}(\boldsymbol{X})$
- 定理より，この情報源に対しては，$\mathcal{C}_{\overline{H}}$ と $\mathcal{C}_W$ の間に包含関係が存在しない
- Example 5.5–5.7: 様々な符号が存在

Example 5.5　冗長度最適だがレート最適でない符号の例
Example 5.6　レート最適だが冗長度最適でない符号の例
Example 5.7　レート最適かつ冗長度最適な符号の例

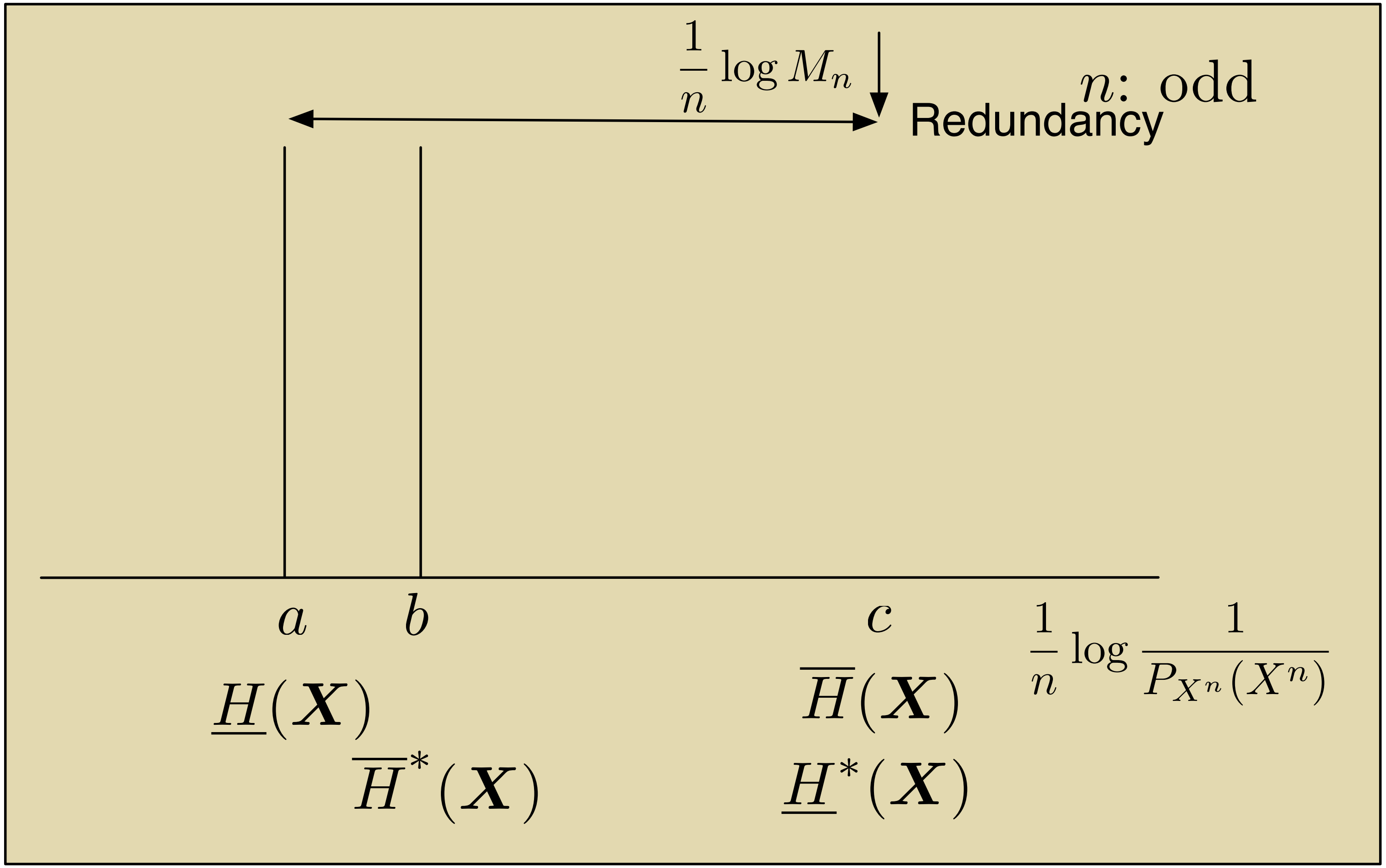
Example 5.5: 冗長度最適だがレート最適でない符号の例



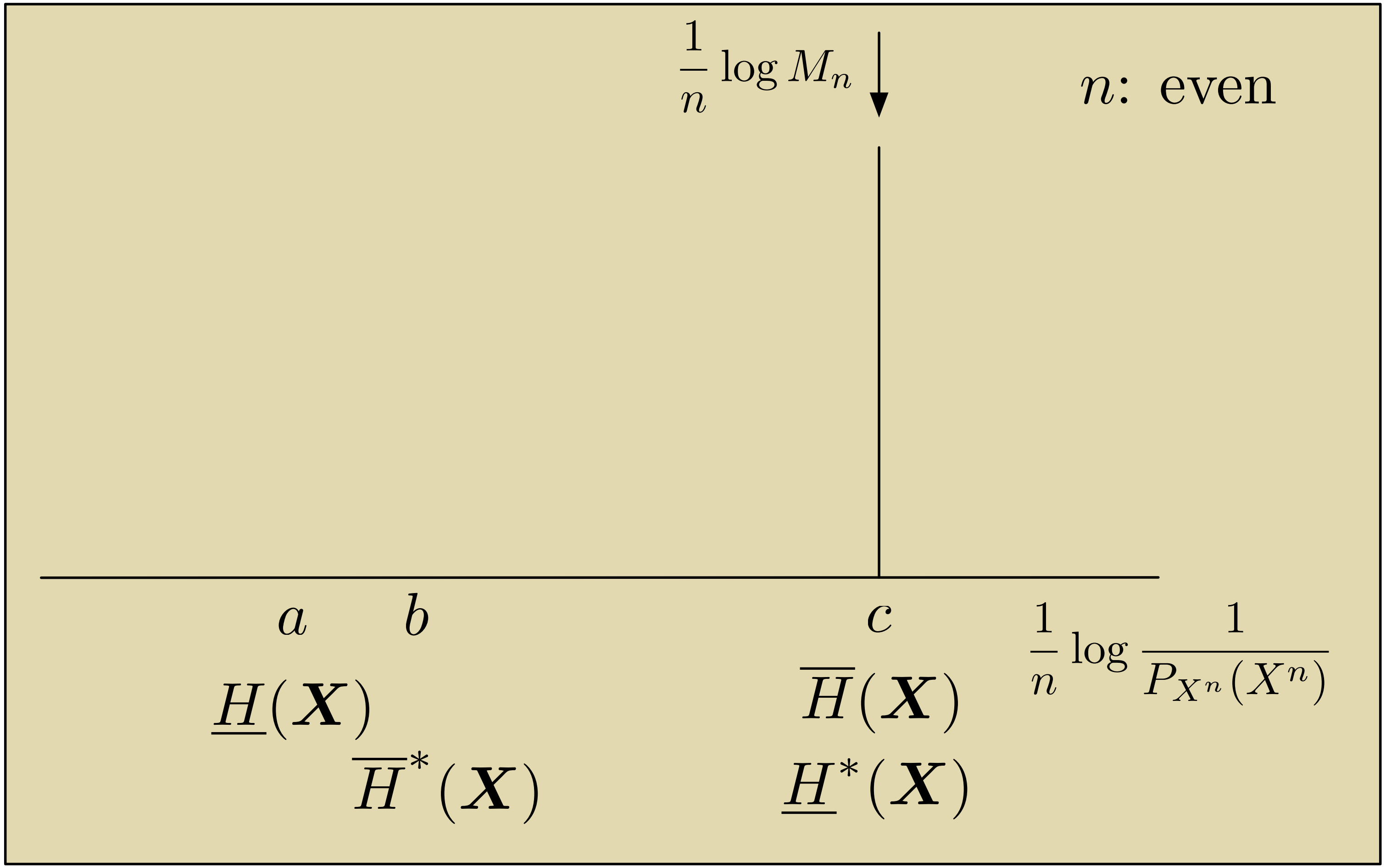
Example 5.5: 冗長度最適だがレート最適でない符号の例



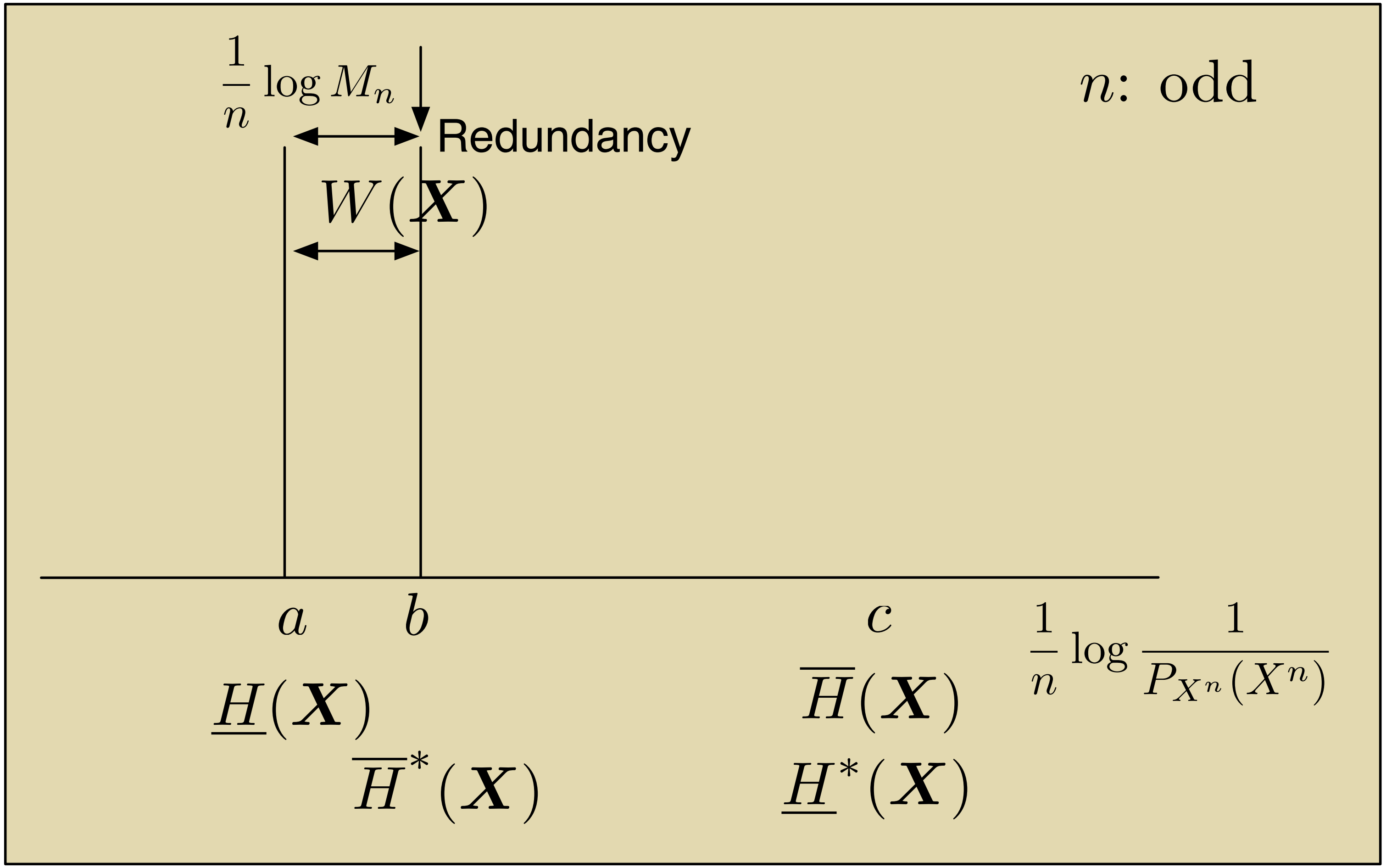
Example 5.6:
レート最適だが冗長度最適でない符号の例



Example 5.6:
レート最適だが冗長度最適でない符号の例



Example 5.7: レート最適かつ冗長度最適な符号の例



Example 5.7:
レート最適かつ冗長度最適な符号の例

$\frac{1}{n}\log M_n$

n: even

a $\quad b$ $\quad c$ $\quad \frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)}$

$\underline{H}(\boldsymbol{X})$ $\quad \overline{H}(\boldsymbol{X})$

$\overline{H}^*(\boldsymbol{X})$ $\quad \underline{H}^*(\boldsymbol{X})$

【まとめ】

本発表のまとめ

- 新しい情報スペクトル量 $W(\boldsymbol{X})$ と $W^*(\boldsymbol{X})$ に対する操作的な意味を紹介した
- 複数の情報スペクトル量を組み合わせて用いることで，エントロピースペクトルの動きがより細かく見れる

1. $\overline{H}(\boldsymbol{X})$ と $\overline{H}^*(\boldsymbol{X})$ を用いる場合
2. $W(\boldsymbol{X})$ の上下界の式を用いる場合