SITA ワークショップ
「最近の情報量に関する話題」

古賀 弘樹[*]　　　有村 光晴[†]

[*] 筑波大学 システム情報系

[†] 湘南工科大学 コンピュータ応用学科

2013/11/27

概要

一般情報源 $\boldsymbol{X} = \{X^n\}_{n=1}^{\infty}$, $X^n \in \mathcal{X}^n$ ($\mathcal{X}$ は可算無限アルファベット) に対して

$$\overline{H}(\boldsymbol{X}) = \inf\left\{\alpha \ : \ \lim_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \le \alpha\right\} = 1\right\}$$

$$\underline{H}(\boldsymbol{X}) = \sup\left\{\beta \ : \ \lim_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \ge \beta\right\} = 1\right\}$$

(Han and Verdú, 1993) の他に

$$\overline{H}^*(\boldsymbol{X}) = \inf\left\{\alpha \ : \ \limsup_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \le \alpha\right\} = 1\right\}$$

$$\underline{H}^*(\boldsymbol{X}) = \sup\left\{\beta \ : \ \limsup_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \ge \beta\right\} = 1\right\}$$

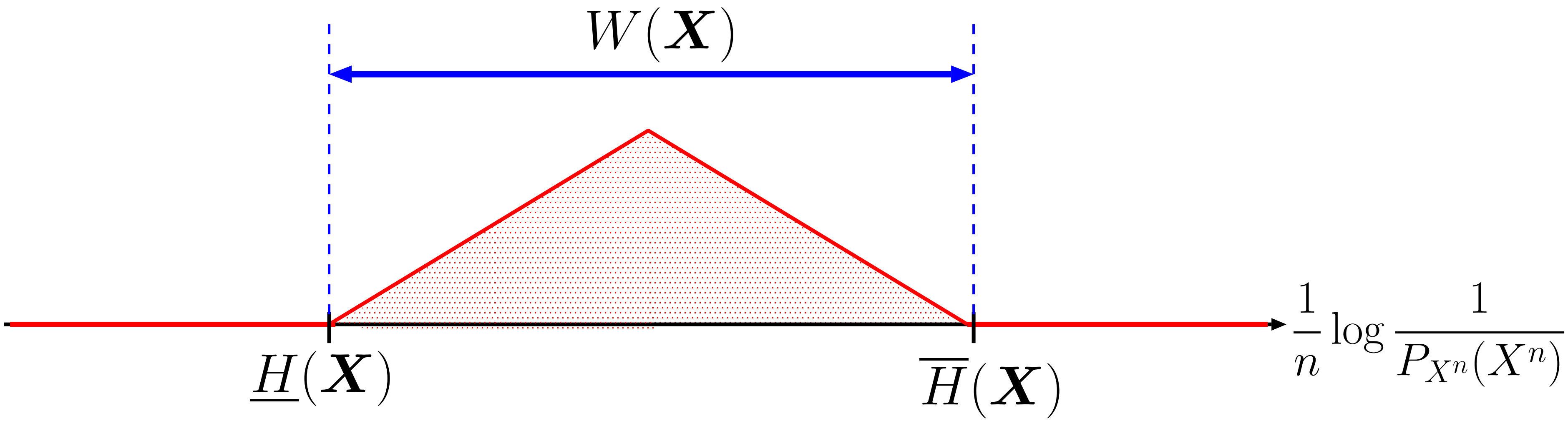
を定義して，4 種類考えることの有用性を情報源符号化の視点から明らかにする．

以下の問題について新たな知見を得る．

- 強い意味で達成不可能なレート，楽観的な情報源符号化
- 強逆性定理
- 情報スペクトルの幅とその上界・下界

ご存知ですか???　（その１）

一般情報源 X の情報スペクトルの幅 $W(\boldsymbol{X})$ は $\overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}(\boldsymbol{X})$ に等しい？



ご存知ですか??? （その２）

ε 情報源符号化問題における最小達成可能固定長符号化レートを $R_\varepsilon(\boldsymbol{X})$ とすると，Steinbergand Verdú (1996) は

$$R_\varepsilon(\boldsymbol{X}) = \overline{J}_\varepsilon(\boldsymbol{X}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \inf\{R : \overline{F}(R) \le \varepsilon\},$$

を示した．ここに

$$\overline{F}(R) = \limsup_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \ge R\right\}$$

である．

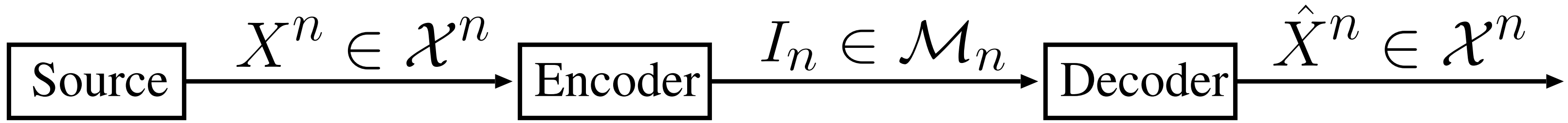
明らかに，$\varepsilon = 0$ のときは復号誤り確率 $\to 0$ の場合と一致するので，次式が成立．

$$R_0(\boldsymbol{X}) = \overline{H}(\boldsymbol{X})$$

では次の式は正しいか??

$$\lim_{\varepsilon\uparrow 1} R_\varepsilon(\boldsymbol{X}) = \underline{H}(\boldsymbol{X})$$

一般情報源の固定長符号化



○ **一般情報源** $\boldsymbol{X} = \{X_n\}_{n=1}^{\infty},\ X^n \in \mathcal{X}^n$

- $\mathcal{X}$ **は有限または可算無限アルファベット**
- X^n **の確率分布を** P_{X^n}**．** $P_{X^n}(x^n) \overset{\mathrm{def}}{=} \Pr\{X^n = x^n\}$ **と書く．**
- $P_{X^n},\ n \geq 1$ **は整合性条件** $\sum_{x \in \mathcal{X}} P_{X^{n+1}}(x^n x) = P_{X^n}(x^n)$ **を満たさなくてよい．**

○ **符号器と復号器**

- **符号器** $f_n : \mathcal{X}^n \to \mathcal{M}_n \overset{\mathrm{def}}{=} \{1, 2, \ldots, M_n\}$ $(\forall n \geq 1)$
- **復号器** $g_n : \mathcal{M}_n \to \mathcal{X}^n$ $(\forall n \geq 1)$
- **復号誤り確率** $P_e^{(n)} \overset{\mathrm{def}}{=} \Pr\{X^n \neq g_n(f_n(X^n))\}$ $(\forall n \geq 1)$

最小達成可能固定長符号化レート

定義１:
レート R **が達成可能**
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ **ある** $\{(f_n, g_n)\}_{n=1}^{\infty}$ **が存在して次の２式を満たす.**

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M_n \leq R \quad \text{かつ} \quad \lim_{n\to\infty} P_e^{(n)} = 0$$

達成可能なレート R **の下限を** $R(\boldsymbol{X})$ **と書く.**

定理１ (Han and Verdú, 1993):

$$R(\boldsymbol{X}) = \overline{H}(\boldsymbol{X}) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\left\{\alpha \;:\; \lim_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \leq \alpha\right\} = 1\right\}$$

スペクトル上エントロピーレート

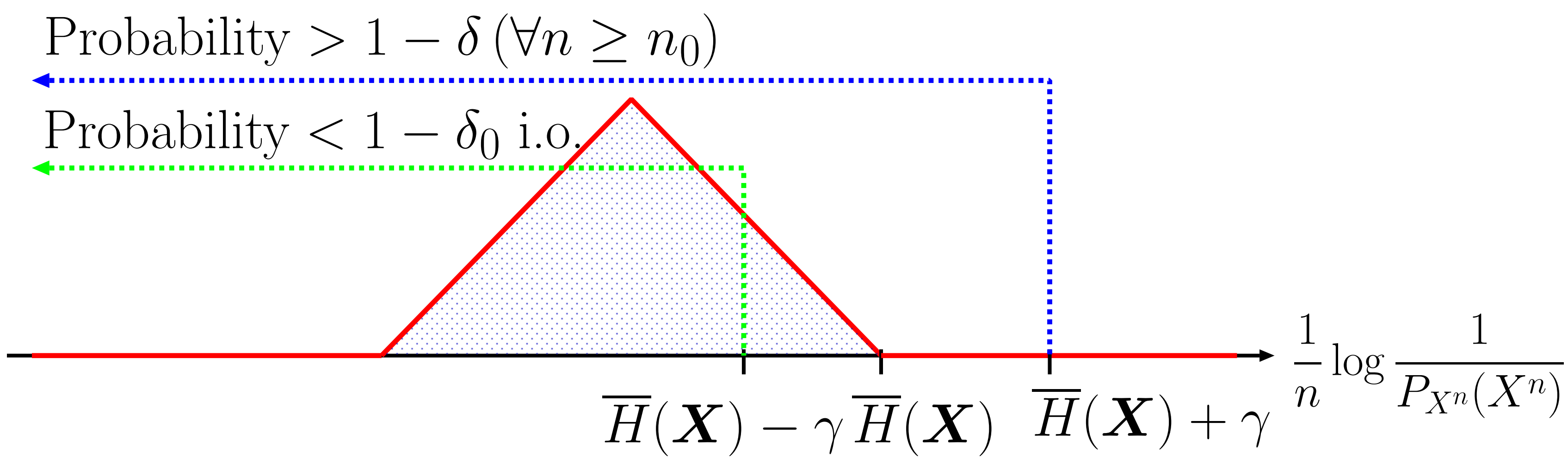
スペクトル上エントロピーレートの定義

$$\overline{H}(\boldsymbol{X}) = \inf\left\{\alpha : \lim_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \le \alpha\right\} = 1\right\}$$

より次の２つの性質が導かれる． $(\gamma > 0, \delta \in (0,1)$ **は任意定数，** $\delta_0 \in (0,1)$ **は定数**$)$

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \le \overline{H}(\boldsymbol{X}) + \gamma\right\} > 1 - \delta \quad \text{for all } n \ge n_0$$

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \le \overline{H}(\boldsymbol{X}) - \gamma\right\} < 1 - \delta_0 \quad \text{infinitely often}$$



$\overline{H}^*(\boldsymbol{X})$　〜日陰者の$\overline{H}(\boldsymbol{X})$の弟分〜

$\overline{H}(\boldsymbol{X})$の定義は次のようにも書ける．

$$\overline{H}(\boldsymbol{X}) = \inf\left\{\alpha \ : \ \liminf_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \le \alpha\right\} = 1\right\}$$

これに対して，$\overline{H}^*(\boldsymbol{X})$は

$$\begin{aligned}\overline{H}^*(\boldsymbol{X}) &= \inf\left\{\alpha \ : \ \limsup_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \le \alpha\right\} = 1\right\} \\ &= \inf\left\{\alpha \ : \ \liminf_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \ge \alpha\right\} = 0\right\} \\ &= \sup\left\{\beta \ : \ \liminf_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \ge \beta\right\} > 0\right\}\end{aligned}$$

と定義される．

$\overline{H}^*(\boldsymbol{X})$ の直観的な意味

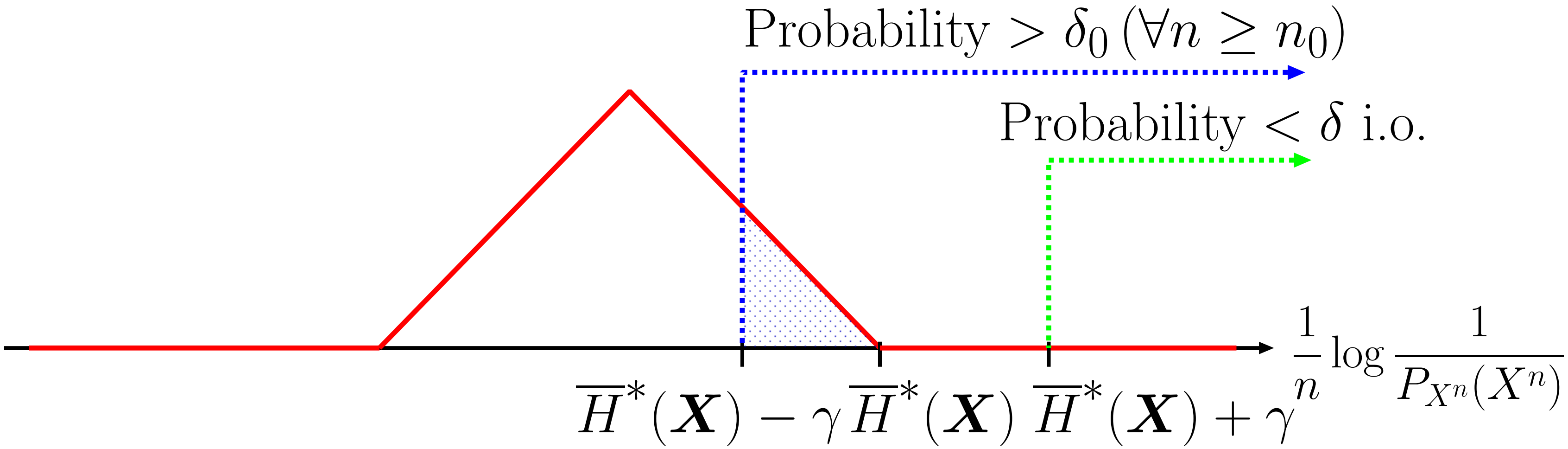
$$\overline{H}^*(\boldsymbol{X}) = \sup\left\{\beta \ : \ \liminf_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \geq \beta\right\} > 0\right\}$$

から次の２つの性質が導かれる.

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \geq \overline{H}^*(\boldsymbol{X}) - \gamma\right\} > \delta_0 \quad \text{for all } n \geq n_0$$

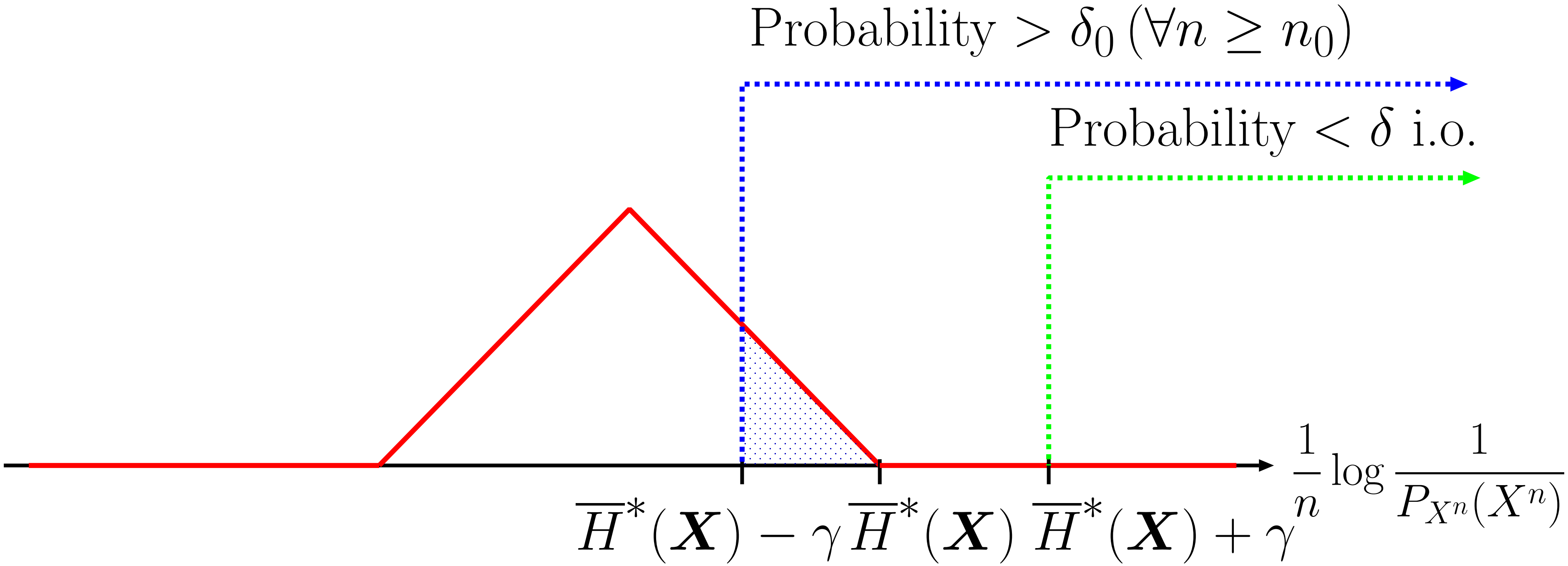
$$\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \geq \overline{H}^*(\boldsymbol{X}) + \gamma\right\} < \delta \quad \text{infinitely often}$$

($\gamma > 0, \delta \in (0,1)$ **は任意定数,** $\delta_0 \in (0,1)$ **は** γ **に依存した定数**)



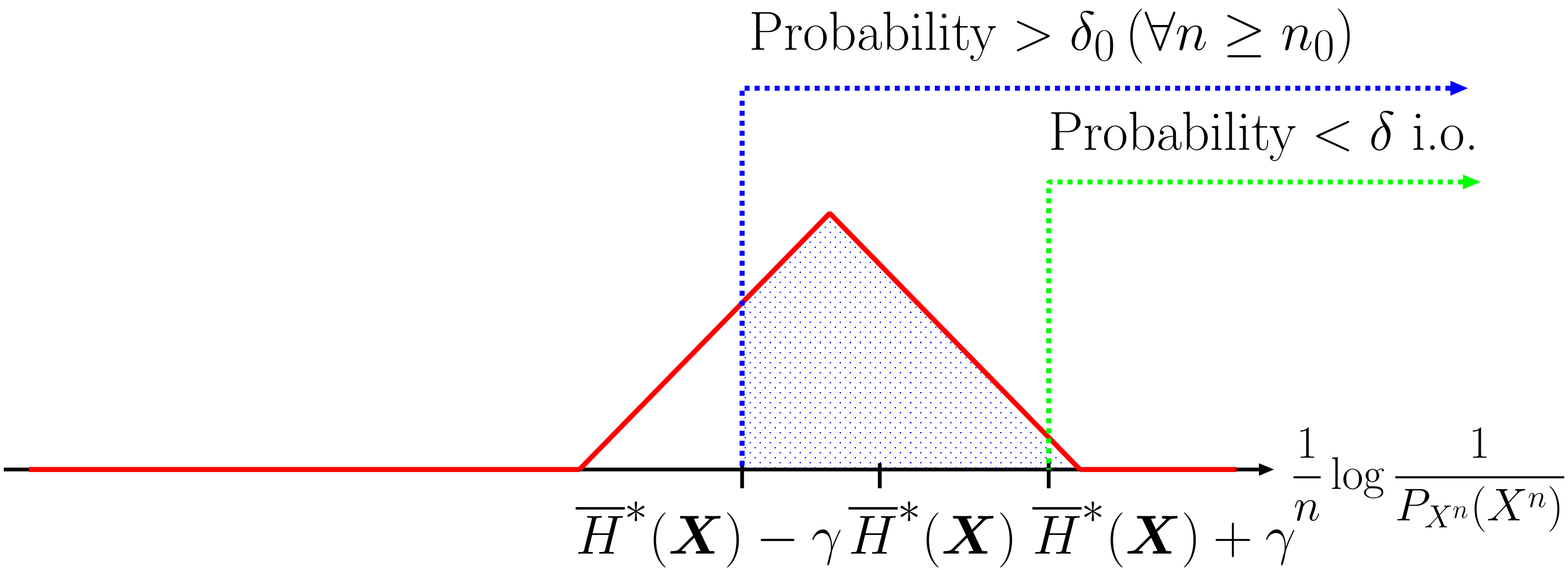
$\overline{H}^*(\boldsymbol{X})$ の直観的な意味: パラパラアニメ

$$\overline{H}^*(\boldsymbol{X}) = \sup\left\{\beta \ : \ \liminf_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \geq \beta\right\} > 0\right\}$$



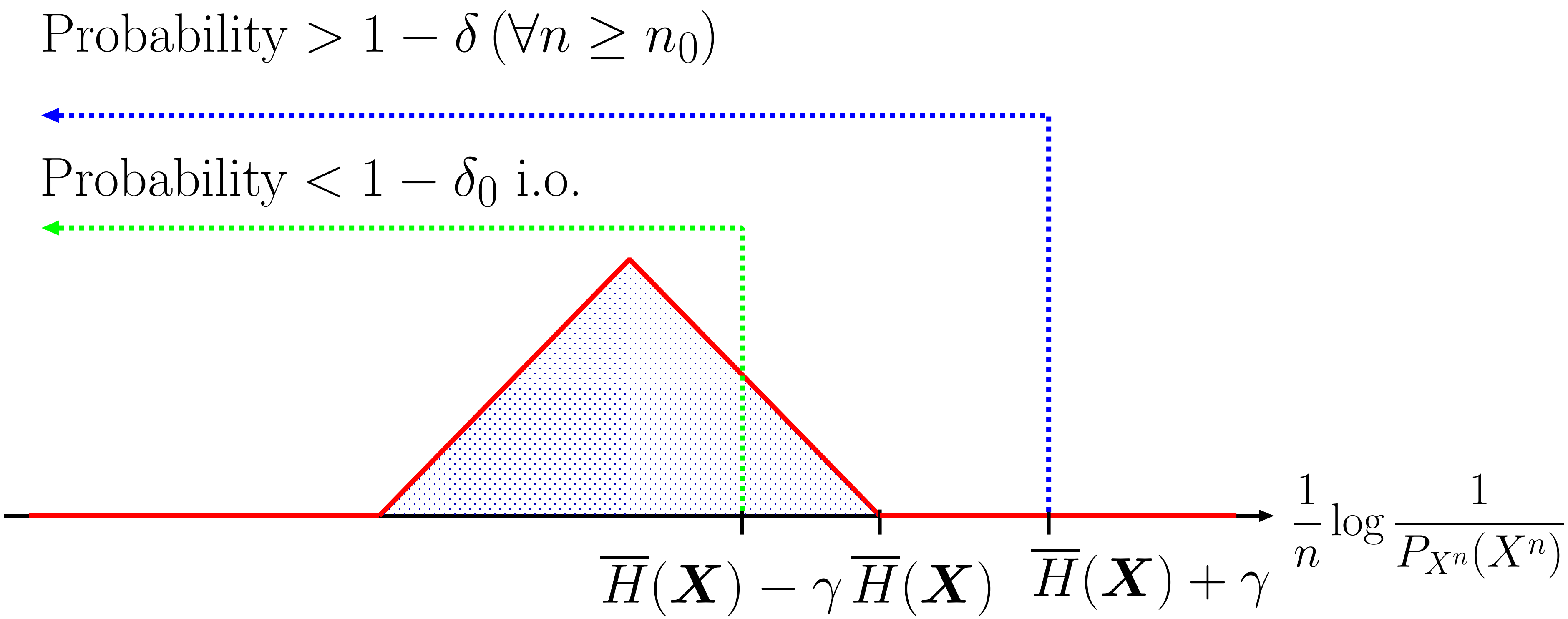
$\overline{H}^*(\boldsymbol{X})$の直観的な意味: パラパラアニメ

$$\overline{H}^*(\boldsymbol{X}) = \sup\left\{\beta \ : \ \liminf_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \geq \beta\right\} > 0\right\}$$



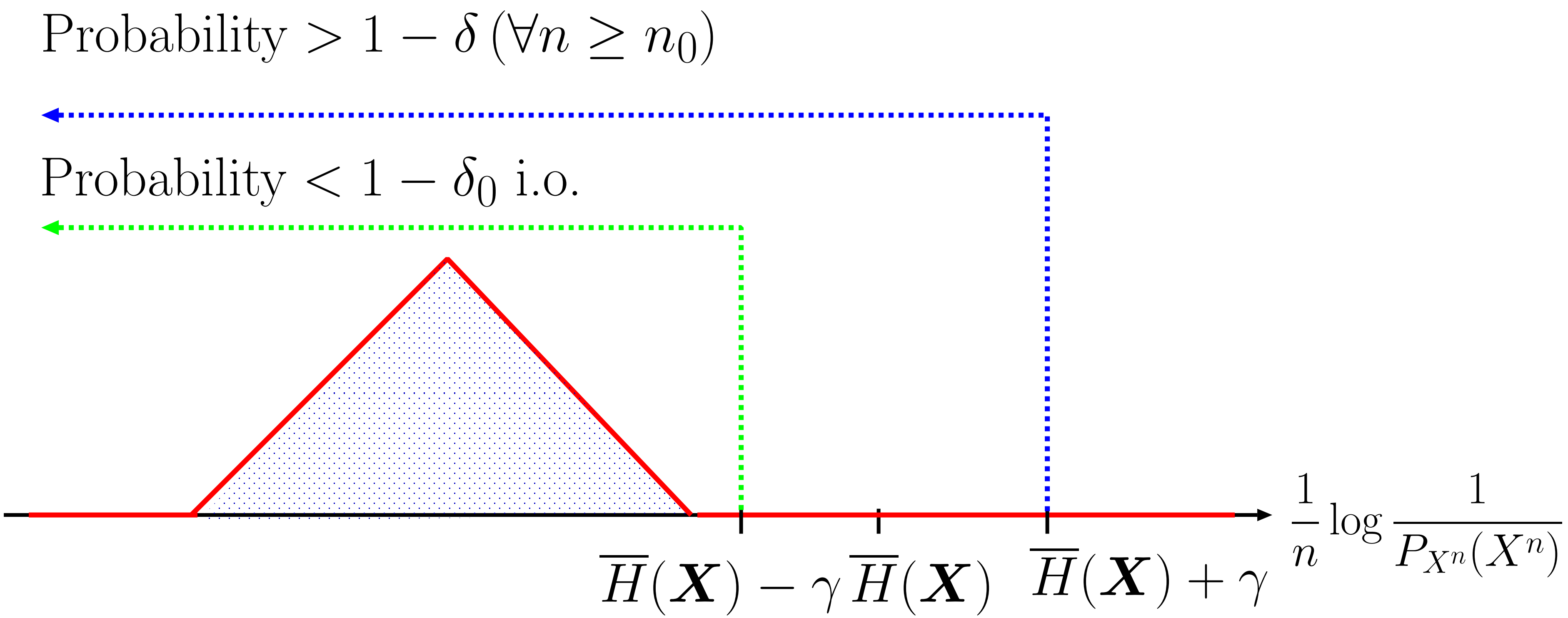
$\overline{H}(\boldsymbol{X})$ の直観的な意味: パラパラアニメ

$$\overline{H}(\boldsymbol{X}) = \inf\left\{\alpha \;:\; \liminf_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \le \alpha\right\} = 1\right\}$$



$\overline{H}(\boldsymbol{X})$ の直観的な意味: パラパラアニメ

$$\overline{H}(\boldsymbol{X}) = \inf\left\{\alpha \;:\; \liminf_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \le \alpha\right\} = 1\right\}$$



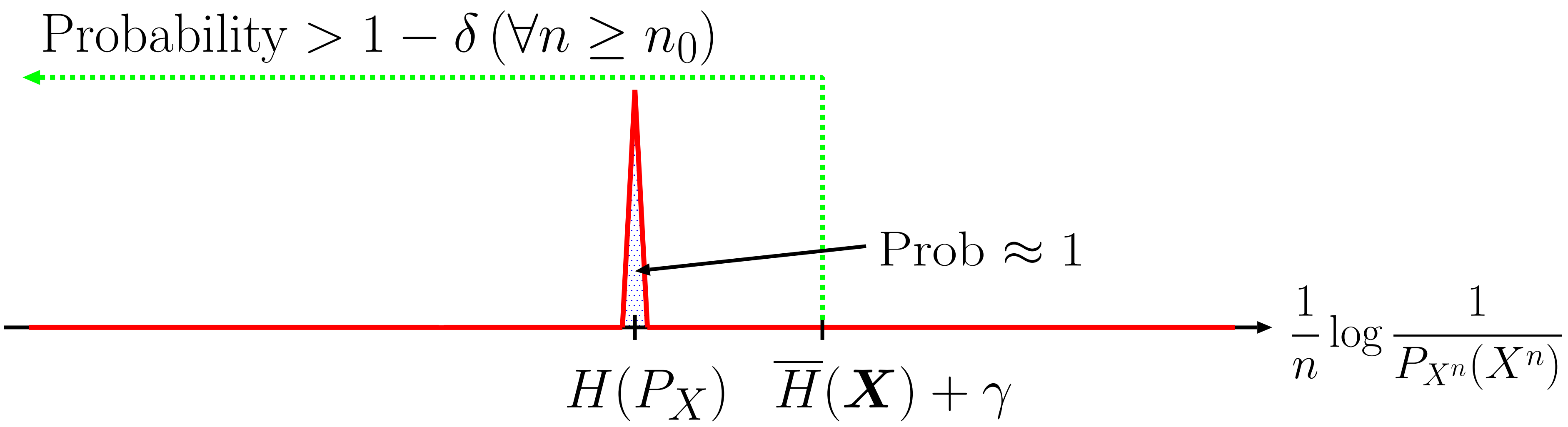
練習問題１（定常無記憶情報源）

一般情報源 $\boldsymbol{X} = \{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ **が**

$$P_{X^n}(x^n) = \prod_{i=1}^{n} P_X(x_i), \quad \forall n \geq 1$$

によって定義されるとき，

$$\overline{H}(\boldsymbol{X}) = \overline{H}^*(\boldsymbol{X}) = H(P_X)$$



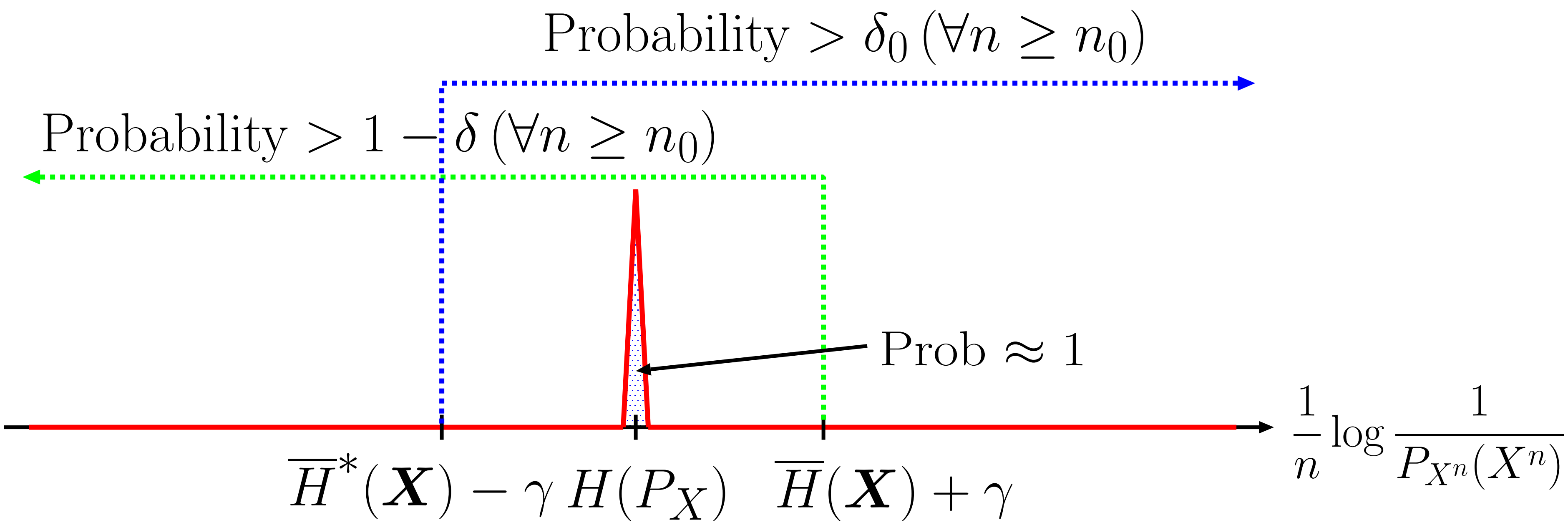
練習問題１（定常無記憶情報源）

一般情報源 $\boldsymbol{X} = \{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ **が**

$$P_{X^n}(x^n) = \prod_{i=1}^{n} P_X(x_i), \quad \forall n \geq 1$$

によって定義されるとき，

$$\overline{H}(\boldsymbol{X}) = \overline{H}^*(\boldsymbol{X}) = H(P_X)$$



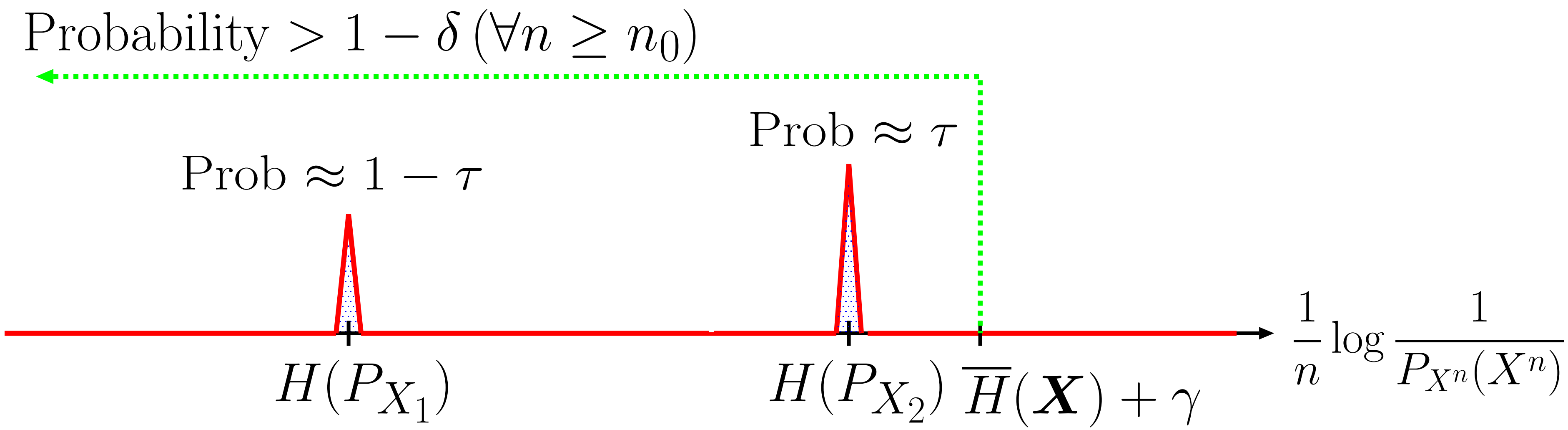
練習問題２（混合情報源）

一般情報源 $\boldsymbol{X} = \{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ **が**

$$P_{X^n}(x^n) = (1-\tau)\prod_{i=1}^{n} P_{X_1}(x_i) + \tau \prod_{i=1}^{n} P_{X_2}(x_i), \quad \forall n \geq 1$$

によって定義される ($\tau \in (0,1)$ **は定数，** $H(P_{X_1}) < H(P_{X_2})$ **を仮定**) **とき，**

$$\overline{H}(\boldsymbol{X}) = \overline{H}^*(\boldsymbol{X}) = H(P_{X_2})$$



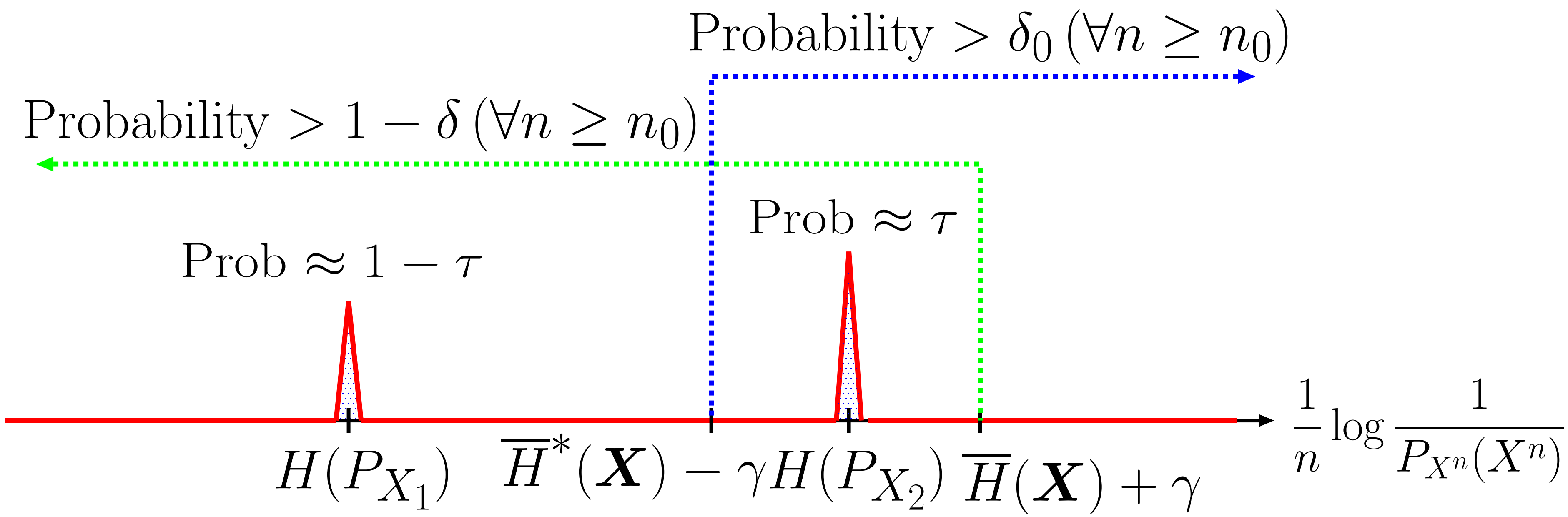
練習問題２（混合情報源）

一般情報源 $\boldsymbol{X} = \{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$P_{X^n}(x^n) = (1-\tau)\prod_{i=1}^{n} P_{X_1}(x_i) + \tau \prod_{i=1}^{n} P_{X_2}(x_i), \quad \forall n \geq 1$$

によって定義される $(\tau \in (0,1)$ は定数，$H(P_{X_1}) < H(P_{X_2})$ を仮定$)$ とき，

$$\overline{H}(\boldsymbol{X}) = \overline{H}^*(\boldsymbol{X}) = H(P_{X_2})$$



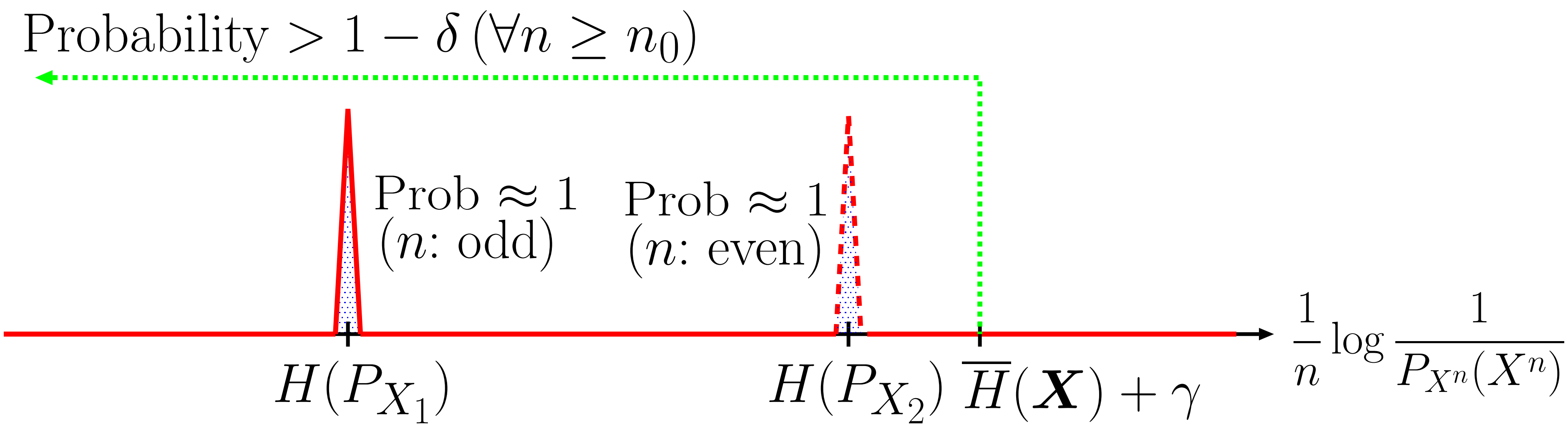
練習問題３（振動情報源）

一般情報源 $\boldsymbol{X} = \{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$P_{X^n}(x^n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} P_{X_1}(x_i) & (n\text{が奇数のとき}) \\ \prod_{i=1}^{n} P_{X_2}(x_i) & (n\text{が偶数のとき}) \end{cases}$$

によって定義される $(H(P_{X_1}) < H(P_{X_2})$ を仮定$)$ とき，

$$\overline{H}(\boldsymbol{X}) = H(P_{X_2}) \qquad \overline{H}^*(\boldsymbol{X}) = H(P_{X_1})$$



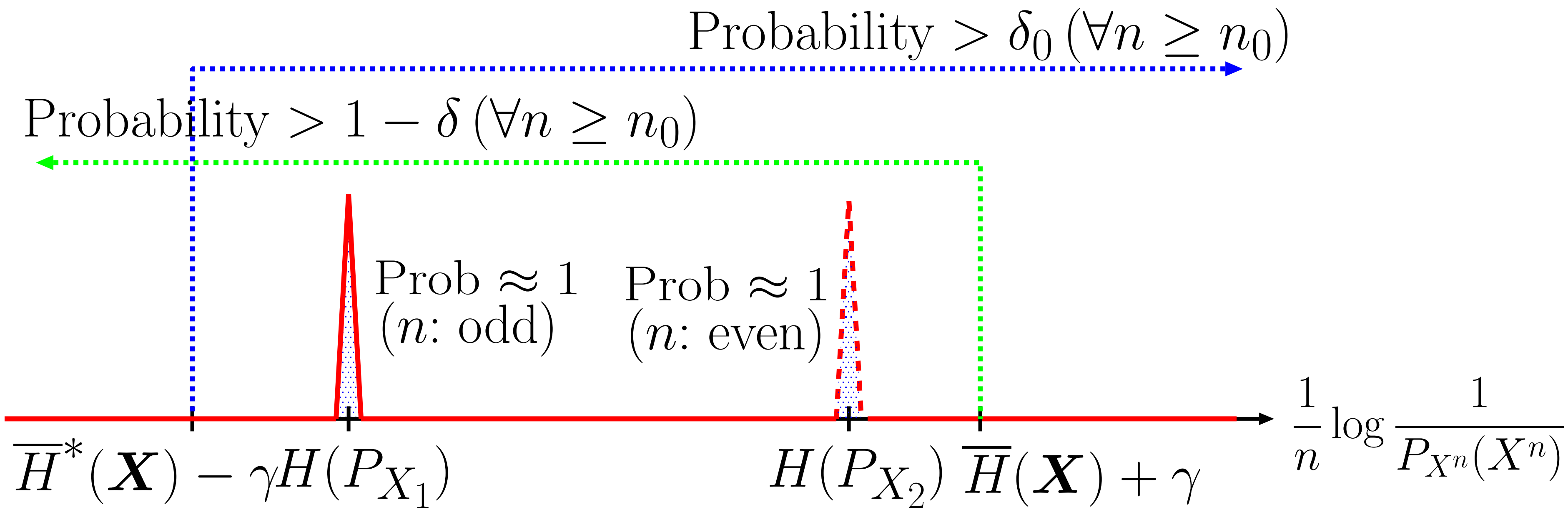
練習問題３（振動情報源）

一般情報源 $\boldsymbol{X} = \{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$P_{X^n}(x^n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} P_{X_1}(x_i) & (n\text{が奇数のとき}) \\ \prod_{i=1}^{n} P_{X_2}(x_i) & (n\text{が偶数のとき}) \end{cases}$$

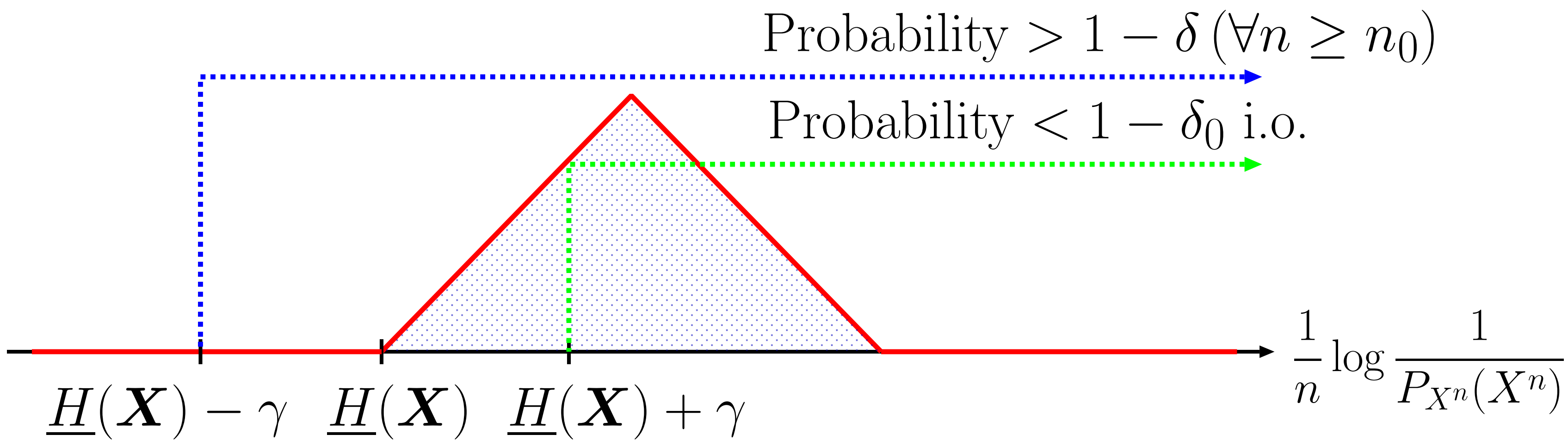
によって定義される $(H(P_{X_1}) < H(P_{X_2})$ を仮定$)$ とき，

$$\overline{H}(\boldsymbol{X}) = H(P_{X_2}) \qquad \overline{H}^*(\boldsymbol{X}) = H(P_{X_1})$$



$\underline{H}(\boldsymbol{X})$: スペクトル下エントロピーレート

$$\underline{H}(\boldsymbol{X}) = \sup\left\{\beta \;:\; \lim_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \geq \beta\right\} = 1\right\}$$

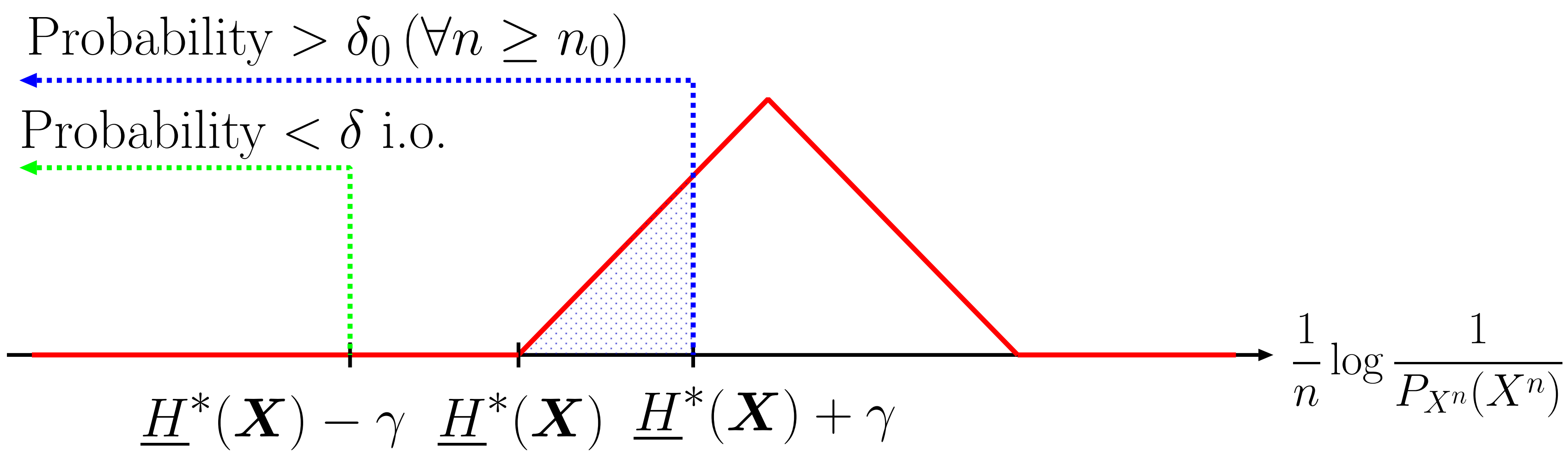


$\underline{H}(\boldsymbol{X})$ と $\underline{H}^*(\boldsymbol{X})$　〜もう１組の双子〜

$$\underline{H}(\boldsymbol{X}) = \sup\left\{\beta \ : \ \liminf_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \geq \beta\right\} = 1\right\}$$

$$\underline{H}^*(\boldsymbol{X}) = \sup\left\{\beta \ : \ \limsup_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \geq \beta\right\} = 1\right\}$$

$$= \inf\left\{\alpha \ : \ \liminf_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \leq \alpha\right\} > 0\right\}$$



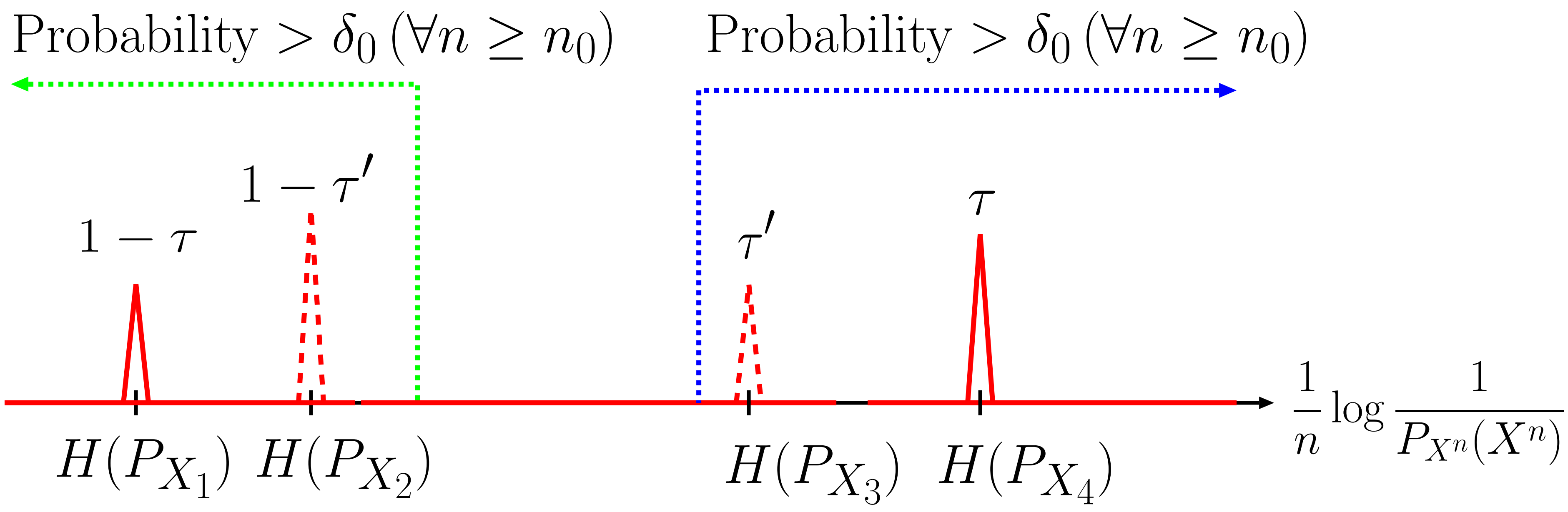
練習問題４（振動する混合情報源：その１）

一般に情報源 $\boldsymbol{X} = \{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$P_{X^n}(x^n) = \begin{cases} (1-\tau)P_{X_1^n}(x^n) + \tau P_{X_4^n}(x^n) & (n\text{ が奇数のとき}) \\ (1-\tau')P_{X_2^n}(x^n) + \tau' P_{X_3^n}(x^n) & (n\text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

によって定義される $(H(P_{X_1}) < H(P_{X_2}) < H(P_{X_3}) < H(P_{X_4}))$ を仮定$)$ とき，

$$\underline{H}(\boldsymbol{X}) = H(P_{X_1}), \quad \underline{H}^*(\boldsymbol{X}) = H(P_{X_2}), \quad \overline{H}^*(\boldsymbol{X}) = H(P_{X_3}), \quad \overline{H}(\boldsymbol{X}) = H(P_{X_4})$$



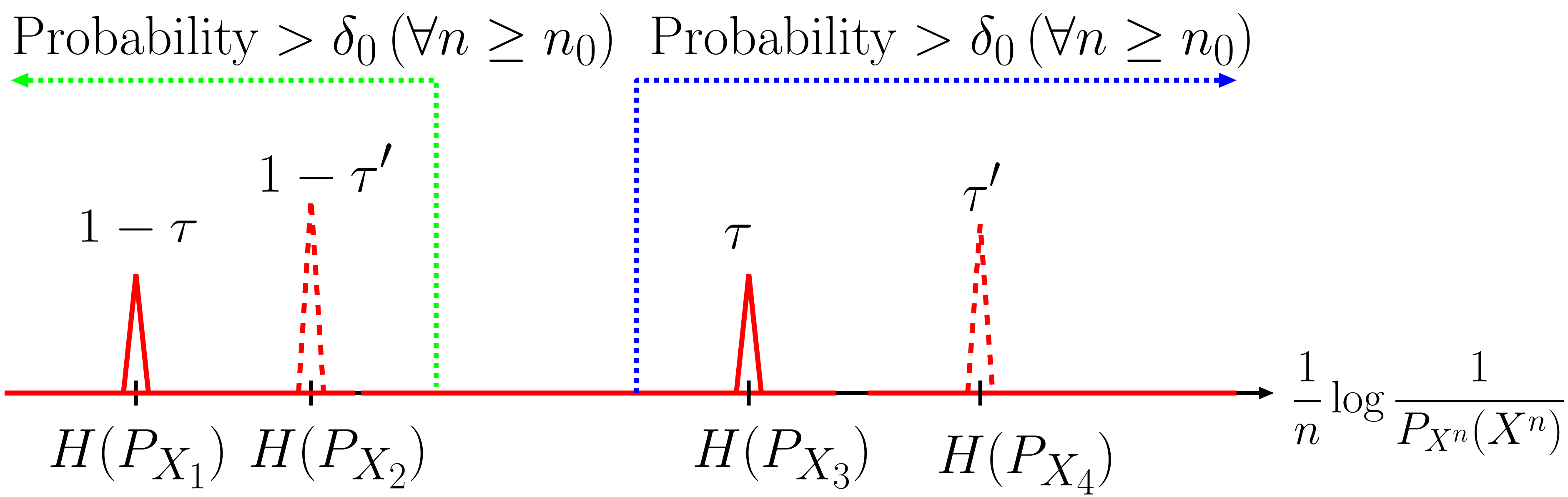
練習問題５（振動する混合情報源：その２）

一般情報源 $\boldsymbol{X} = \{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$P_{X^n}(x^n) = \begin{cases} (1-\tau)P_{X_1^n}(x^n) + \tau P_{X_3^n}(x^n) & (n\text{が奇数のとき}) \\ (1-\tau')P_{X_2^n}(x^n) + \tau' P_{X_4^n}(x^n) & (n\text{が偶数のとき}) \end{cases}$$

によって定義される $(H(P_{X_1}) < H(P_{X_2}) < H(P_{X_3}) < H(P_{X_4}))$ を仮定$)$ とき,

$$\underline{H}(\boldsymbol{X}) = H(P_{X_1}), \quad \underline{H}^*(\boldsymbol{X}) = H(P_{X_2}), \quad \overline{H}^*(\boldsymbol{X}) = H(P_{X_3}), \quad \overline{H}(\boldsymbol{X}) = H(P_{X_4})$$



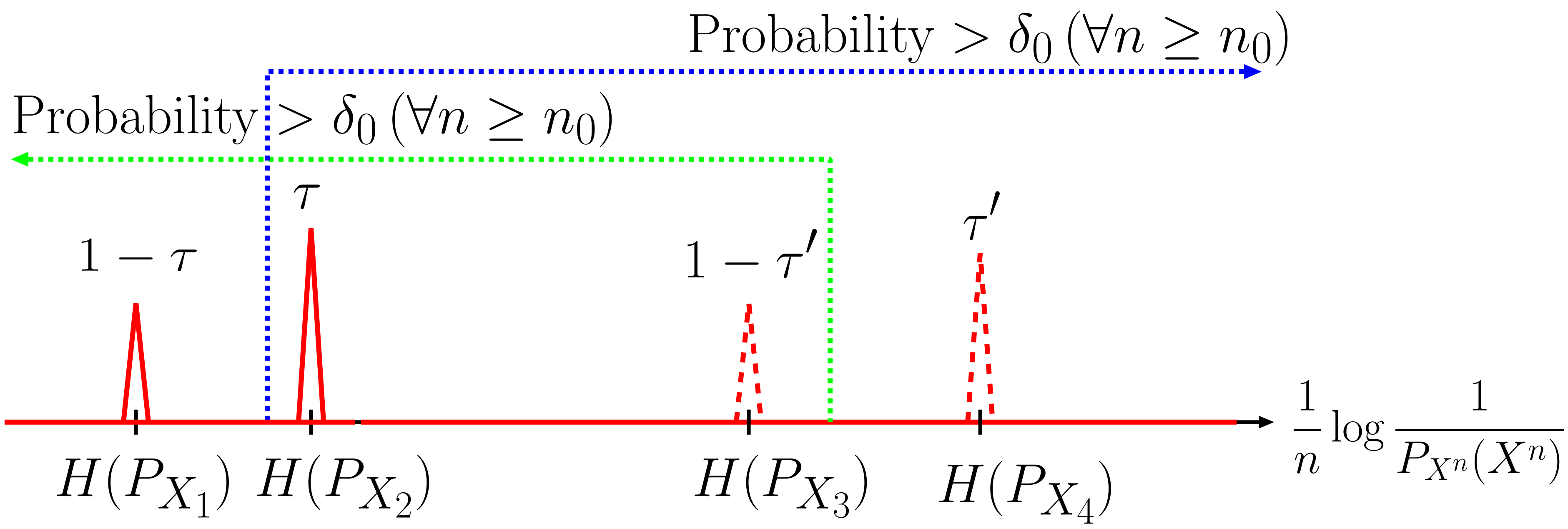
練習問題６（振動する混合情報源：その３）

一般情報源 $\boldsymbol{X} = \{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$P_{X^n}(x^n) = \begin{cases} (1-\tau)P_{X_1^n}(x^n) + \tau P_{X_2^n}(x^n) & (n \text{ が奇数のとき}) \\ (1-\tau')P_{X_3^n}(x^n) + \tau' P_{X_4^n}(x^n) & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

によって定義される $(H(P_{X_1}) < H(P_{X_2}) < H(P_{X_3}) < H(P_{X_4}))$ を仮定) とき,

$$\underline{H}(\boldsymbol{X}) = H(P_{X_1}), \quad \underline{H}^*(\boldsymbol{X}) = H(P_{X_3}), \quad \overline{H}^*(\boldsymbol{X}) = H(P_{X_2}), \quad \overline{H}(\boldsymbol{X}) = H(P_{X_4})$$



歴史的経緯

定義(Chen and Alajaji, 1999)
確率変数列 $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ **と** $\varepsilon \in [0,1]$ **に対して,**

$$\overline{U}_{\varepsilon} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup\Big\{\theta \,:\, \limsup_{n\to\infty} \Pr\{Z_n \le \theta\} \le \varepsilon\Big\}$$

$$\underline{U}_{\varepsilon} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup\Big\{\theta \,:\, \liminf_{n\to\infty} \Pr\{Z_n \le \theta\} \le \varepsilon\Big\}$$

$Z_n = \frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)}$ $(n \ge 1)$ **とすれば次式が成立.**

$$\overline{U}_0 = \underline{H}(\boldsymbol{X}), \quad \underline{U}_0 = \underline{H}^*(\boldsymbol{X}), \quad \overline{U}_{1-} = \overline{H}^*(\boldsymbol{X}), \quad \underline{U}_{1-} = \overline{H}(\boldsymbol{X})$$

(**ただし** $\overline{U}_{1-}, \underline{U}_{1-}$ **は不等号** $\le$ **を** $<$ **に変えた上で定義する**)

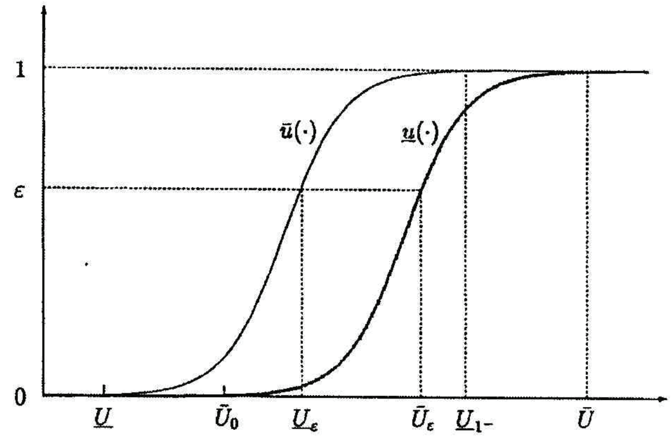


Fig. 1. The asymptotic CDF's of a sequence of random variables $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$: $\overline{u}(\cdot)$ = sup-spectrum and $\underline{u}(\cdot)$ = inf-spectrum.

大小関係

命題１：任意の一般情報源 X に対して次式が成り立つ．

$$\underline{H}(\boldsymbol{X}) \le \overline{H}^*(\boldsymbol{X}) \le \overline{H}(\boldsymbol{X})$$
$$\underline{H}(\boldsymbol{X}) \le \underline{H}^*(\boldsymbol{X}) \le \overline{H}(\boldsymbol{X})$$

（証明）最初の不等式は次の関係式から明らか．

$$\underline{H}(\boldsymbol{X}) = \sup\left\{\beta \,:\, \liminf_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \ge \beta\right\} = 1\right\}$$
$$\overline{H}^*(\boldsymbol{X}) = \sup\left\{\beta \,:\, \liminf_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \ge \beta\right\} > 0\right\}$$
$$\overline{H}(\boldsymbol{X}) = \sup\left\{\beta \,:\, \limsup_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \ge \beta\right\} > 0\right\}$$

最後の等式は $\overline{H}(\boldsymbol{X})$ の定義

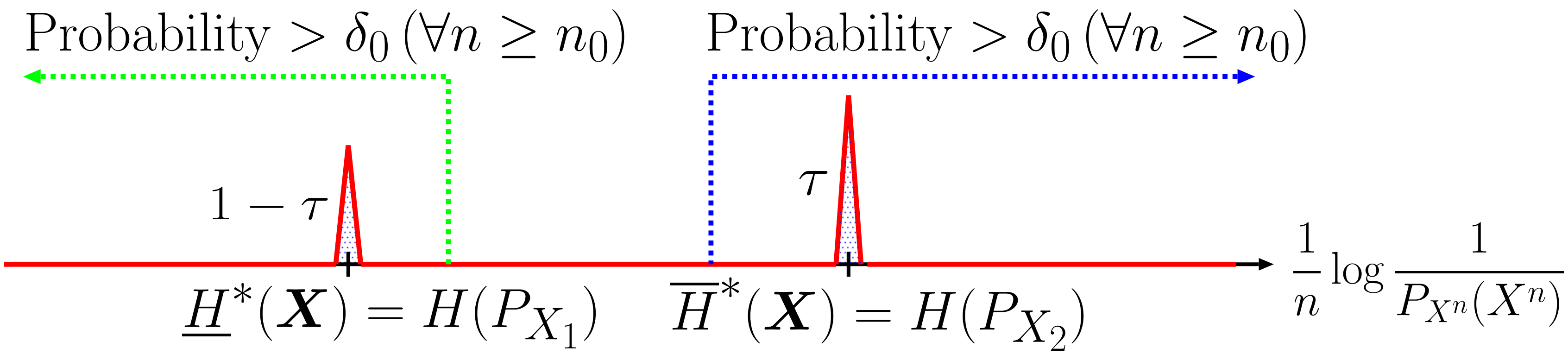
$$\overline{H}(\boldsymbol{X}) = \inf\left\{\alpha \,:\, \liminf_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \le \alpha\right\} = 1\right\}$$

から導かれる．２番目の不等式も同様(すべて $\inf$ を使った式で書く)．

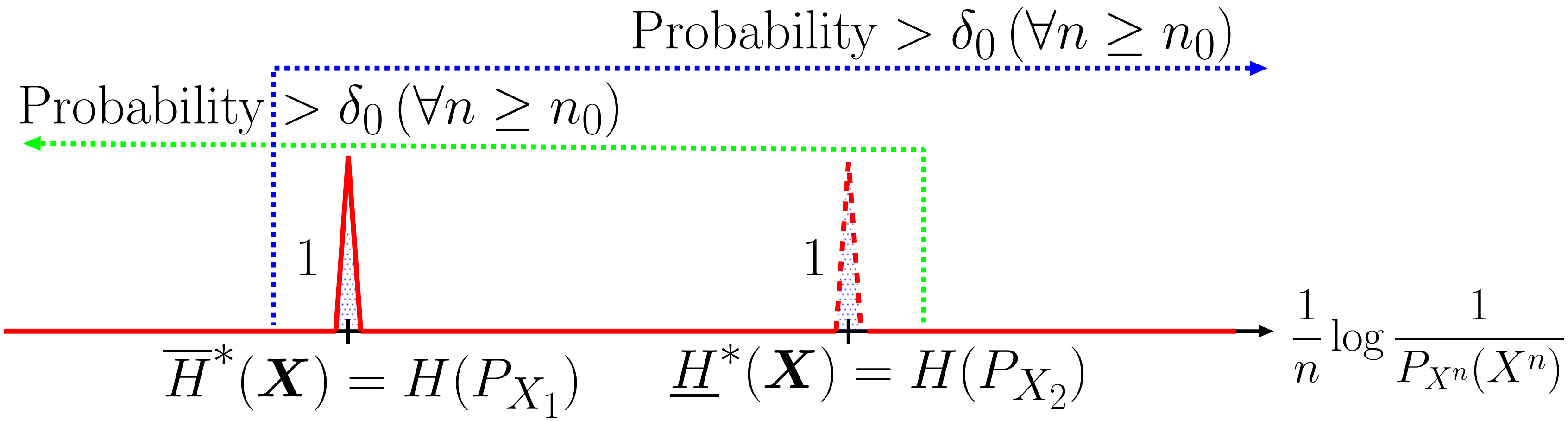
$\overline{H}^*(\boldsymbol{X})$ と $\underline{H}^*(\boldsymbol{X})$ の大小関係

無条件では $\underline{H}^*(\boldsymbol{X}) \le \overline{H}^*(\boldsymbol{X})$ **は成り立たない．** $(\underline{H}(\boldsymbol{X}) \le \overline{H}(\boldsymbol{X})$ **は無条件に成立**$)$

○ **混合情報源**



○ **振動情報源**



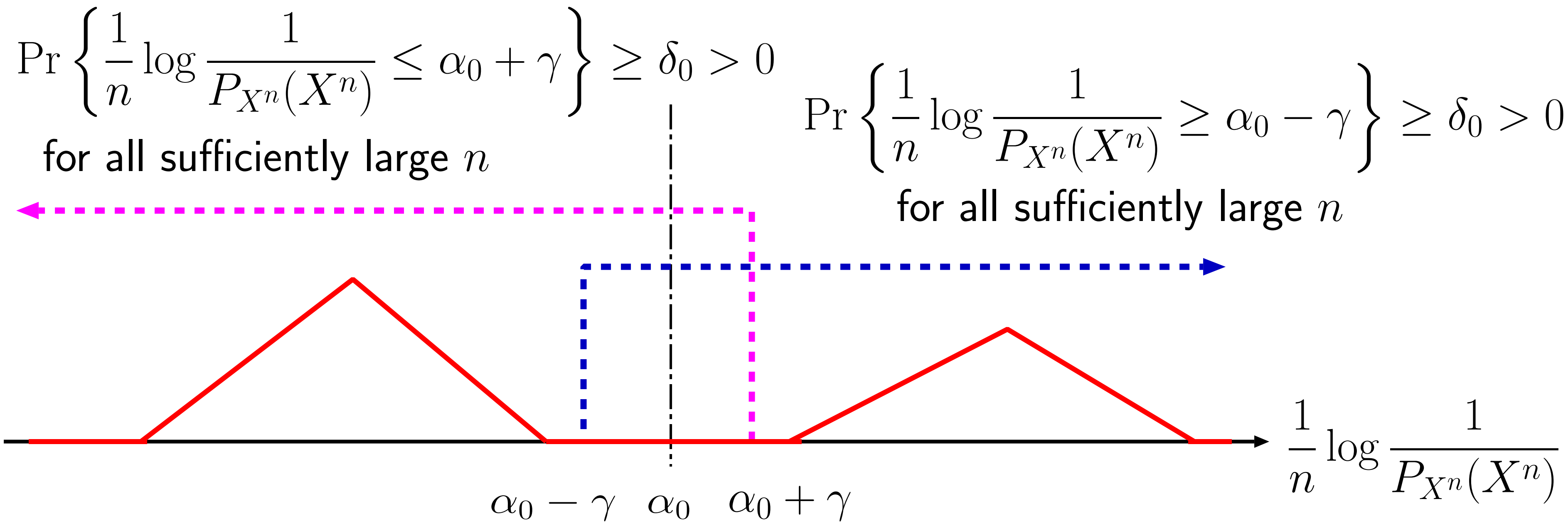
正準な一般情報源

定義２：一般情報源 $\boldsymbol{X} = \{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ **が正準**
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ **ある定数** α_0 **が存在して，任意の** $\gamma > 0$ **に対して次式を満たす.**

$$\liminf_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \le \alpha_0 + \gamma\right\} > 0,$$

$$\liminf_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \ge \alpha_0 - \gamma\right\} > 0.$$

定常無記憶情報源，混合情報源は正準だが振動情報源は正準でない.



$\underline{H}^*(\boldsymbol{X}) \leq \overline{H}^*(\boldsymbol{X})$ の必要十分条件

定理2 (Koga, 2011)：

$\underline{H}^*(\boldsymbol{X}) \leq \overline{H}^*(\boldsymbol{X}) \Longleftrightarrow \boldsymbol{X}$ が正準

$\underline{H}^*(\boldsymbol{X}) \leq \overline{H}^*(\boldsymbol{X})$ の必要十分条件

定理２ (Koga, 2011)：

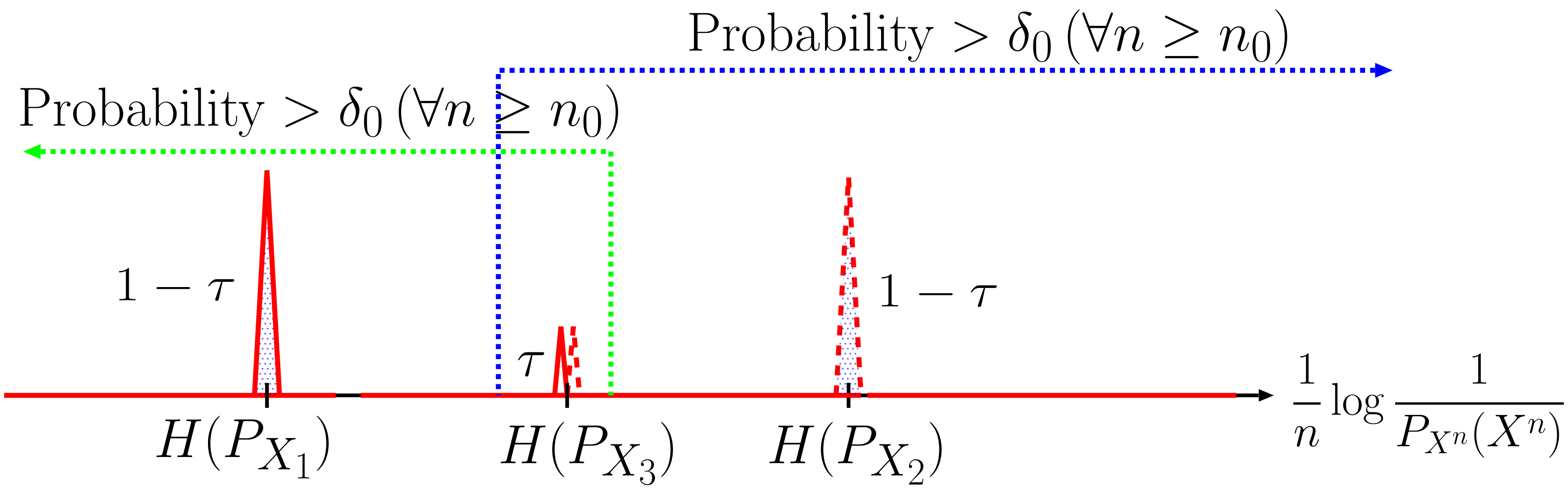
$\underline{H}^*(\boldsymbol{X}) \leq \overline{H}^*(\boldsymbol{X}) \Longleftrightarrow \boldsymbol{X}$ **が正準**

定常な成分をもつ振動情報源

$$P_{X^n}(x^n) = \begin{cases} (1-\tau)\prod_{i=1}^{n} P_{X_1}(x_i) + \tau \prod_{i=1}^{n} P_{X_3}(x_i) & (n \text{ が奇数のとき}) \\ (1-\tau)\prod_{i=1}^{n} P_{X_2}(x_i) + \tau \prod_{i=1}^{n} P_{X_3}(x_i) & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

では $(H(X_1) < H(X_3) < H(X_2)$ **を仮定**$)$ **次式が成り立つ.**

$$\underline{H}(\boldsymbol{X}) = H(X_1), \quad \underline{H}^*(\boldsymbol{X}) = \overline{H}^*(\boldsymbol{X}) = H(X_3), \quad \overline{H}(\boldsymbol{X}) = H(X_2)$$



$\underline{H}^*(\boldsymbol{X}) \le \overline{H}^*(\boldsymbol{X})$ の必要十分条件の証明：その１

「$\underline{H}^*(\boldsymbol{X}) \le \overline{H}^*(\boldsymbol{X}) \Longrightarrow \boldsymbol{X}$ が正準」を示す.

$\gamma > 0$ を任意定数とすると，$\underline{H}^*(\boldsymbol{X}), \overline{H}^*(\boldsymbol{X})$ は次式を満たす.

$$\liminf_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \le \underline{H}^*(\boldsymbol{X}) + \gamma\right\} > 0,$$
$$\liminf_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \ge \overline{H}^*(\boldsymbol{X}) - \gamma\right\} > 0.$$

仮定より $\underline{H}^*(\boldsymbol{X}) \le \overline{H}^*(\boldsymbol{X})$ であるから，

$$\liminf_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \ge \underline{H}^*(\boldsymbol{X}) - \gamma\right\} > 0.$$

となり，これらより $\alpha_0 = \underline{H}^*(\boldsymbol{X})$ で正準の条件が成り立つことがわかる.

$\underline{H}^*(\boldsymbol{X}) \leq \overline{H}^*(\boldsymbol{X})$の必要十分条件の証明：その２

「$\boldsymbol{X}$が正準 $\Longrightarrow \underline{H}^*(\boldsymbol{X}) \leq \overline{H}^*(\boldsymbol{X})$」を示す．

正準性の仮定より，ある定数α_0が存在して任意の定数$\gamma > 0$に対して

$$\liminf_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \leq \alpha_0 + \gamma\right\} > 0,$$
$$\liminf_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \geq \alpha_0 - \gamma\right\} > 0$$

が成り立つ．一方，$\underline{H}^*(\boldsymbol{X})$は

$$\underline{H}^*(\boldsymbol{X}) = \inf\left\{\alpha \,:\, \liminf_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \leq \alpha\right\} > 0\right\}$$

と書けるから，ここから$\underline{H}^*(\boldsymbol{X}) \leq \alpha_0 + \gamma$がいえる．同様に，$\overline{H}^*(\boldsymbol{X})$は

$$\overline{H}^*(\boldsymbol{X}) = \sup\left\{\beta \,:\, \liminf_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \geq \beta\right\} > 0\right\}$$

と書けるから，$\alpha_0 + \gamma \leq \overline{H}^*(\boldsymbol{X})$がいえる．よって$\underline{H}^*(\boldsymbol{X}) \leq \overline{H}^*(\boldsymbol{X}) + 2\gamma$.

$\overline{H}(\boldsymbol{X})$ と $\overline{H}^*(\boldsymbol{X})$ の操作的意味(直観的な説明)

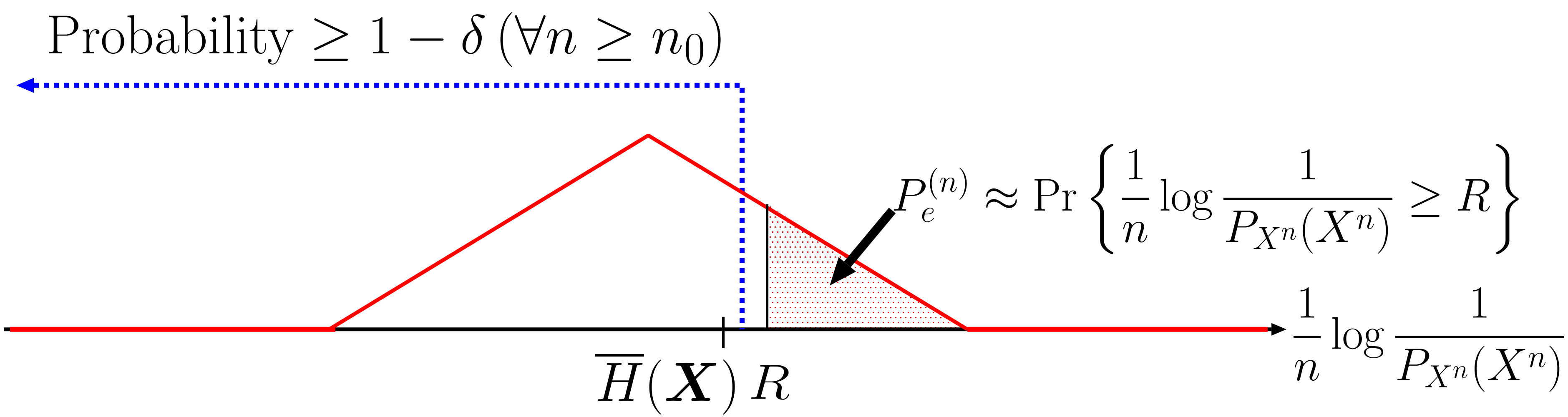
一般情報源 $\boldsymbol{X}$ とレート $R > 0$ が与えられたとする．集合

$$\mathcal{S}_n = \left\{ x^n \in \mathcal{X}^n \;:\; \frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(x^n)} \le R \right\}$$

の要素 $(|\mathcal{S}_n| \le 2^{nR})$ を誤りなく復号できるように符号器と復号器を構成する方式は，復号誤り確率を (ほぼ) 最小にする．この場合の復号誤り確率は

$$P_e^{(n)} = \Pr\{X^n \ne \mathcal{S}_n\} = \Pr\left\{ \frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} > R \right\}$$

なので $R > \overline{H}(\boldsymbol{X})$ ならば $P_e^{(n)} \to 0$, $R < \overline{H}^*(\boldsymbol{X})$ ならば $P_e^{(n)} \ge \delta_0 > 0\ (\forall n \ge n_0)$.



$\overline{H}(\boldsymbol{X})$ と $\overline{H}^*(\boldsymbol{X})$ の操作的意味(直観的な説明)

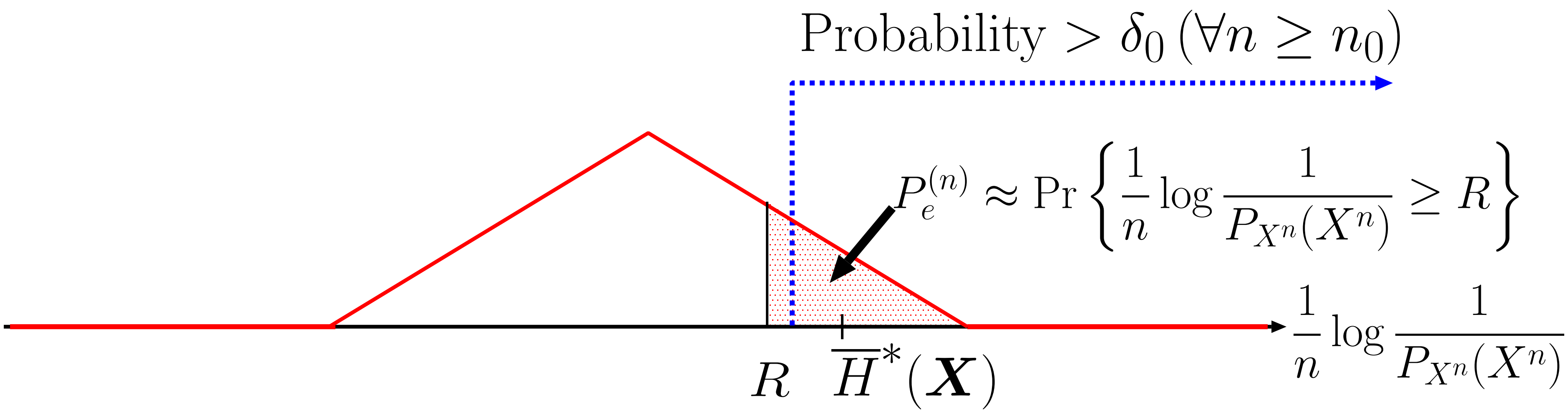
一般情報源 X とレート $R > 0$ が与えられたとする．集合

$$\mathcal{S}_n = \left\{ x^n \in \mathcal{X}^n \,:\, \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(x^n)} \le R \right\}$$

の要素 ($|\mathcal{S}_n| \le 2^{nR}$) を誤りなく復号できるように符号器と復号器を構成する方式は，復号誤り確率を (ほぼ) 最小にする．この場合の復号誤り確率は

$$P_e^{(n)} = \Pr\{X^n \ne \mathcal{S}_n\} = \Pr\left\{ \frac{1}{n} \log \frac{1}{P_{X^n}(X^n)} > R \right\}$$

なので $R > \overline{H}(\boldsymbol{X})$ ならば $P_e^{(n)} \to 0$, $R < \overline{H}^*(\boldsymbol{X})$ ならば $P_e^{(n)} \ge \delta_0 > 0 \; (\forall n \ge n_0)$.



強い意味で達成不可能なレートの上限

定義３：
レート R が「強い意味で達成不可能」
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log M_n \le R$$

を満たすすべての $\{(f_n,g_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は

$$\liminf_{n\to\infty} P_e^{(n)} > 0$$

を満たす.
強い意味で達成不可能なレートの上限を $U(\boldsymbol{X})$ と書く.

定理３ (Hayashi 2008)**：**

$$U(\boldsymbol{X}) = \overline{H}^*(\boldsymbol{X})$$

【注意】$R > U(\boldsymbol{X})$ ならば，ある $\{(f_n,g_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して $\liminf_{n\to\infty} P_e^{(n)} = 0$ を満たす．なので $U(\boldsymbol{X})$ は上記のレート制約のもとで $\liminf_{n\to\infty} P_e^{(n)} = 0$ を満たす符号が存在するレートの下限にもなっている.

楽観的な情報源符号化

定義４ (Vembú, Verdú and Steinberg, 1995)：

レート R **が楽観的な意味で達成可能**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ **ある** $\{(f_n, g_n)\}_{n=1}^{\infty}$ **が存在して，任意の** $\gamma > 0$ **に対して**

$$\frac{1}{n}\log M_n \le R + \gamma \quad \text{かつ} \quad P_e^{(n)} \le \gamma \quad \text{（ある部分列} \{n_i\}_{i=1}^{\infty} \text{に対して）}$$

を満たす．楽観的に達成可能なレートの下限を $R_{opt}(\boldsymbol{X})$ **と書く．**

定理４ (Chen and Alajaji, 1999) ：

$$R_{opt}(\boldsymbol{X}) = U(\boldsymbol{X}) = \overline{H}^{*}(\boldsymbol{X}).$$

$R_{opt}(\boldsymbol{X}) = U(\boldsymbol{X})$の証明

$R_{opt}(\boldsymbol{X}) \le U(\boldsymbol{X})$は前々ページ【注意】より明らか.

$R_{opt}(\boldsymbol{X}) \ge U(\boldsymbol{X})$は背理法を利用して証明できる.

いま，ある$R < U(\boldsymbol{X}) = \overline{H}^*(\boldsymbol{X})$が楽観的な意味で達成可能であるとする.
$R \le \overline{H}^*(\boldsymbol{X}) - 2\gamma_0$なる$\gamma_0 > 0$を選び,

$$\delta_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \liminf_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \ge \overline{H}^*(\boldsymbol{X}) - \gamma_0\right\} > 0$$

とする．仮定より，ある$\{(f_n, g_n)\}_{n=1}^{\infty}$が存在し，ある部分列$\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$に対して

$$\frac{1}{n_i}\log M_{n_i} \le R + \frac{\delta_0}{2}, \quad P_e^{(n_i)} \le \frac{\delta_0}{2}$$

が成り立つ．他方，韓の補題と$\frac{1}{n_i}\log M_{n_i} \le R + \gamma_0 \le \overline{H}^*(\boldsymbol{X}) - \gamma_0$より,

$$P_e^{(n)} \ge \Pr\left\{\frac{1}{n_i}\log\frac{1}{P_{X^{n_i}}(X^{n_i})} \ge \overline{H}^*(\boldsymbol{X}) - \gamma_0\right\} - 2^{-n_i\gamma} > \frac{\delta_0}{2} \quad \text{for all } i \ge i_0$$

となり矛盾.

ε-情報源符号化

定義５：

レート R **が** ε**-達成可能** ($\varepsilon \in [0,1)$ **は定数**)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ **ある** $\{(f_n, g_n)\}_{n=1}^{\infty}$ **が存在して次式を満たす.**

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log M_n \le R \quad \text{かつ} \quad \limsup_{n\to\infty} P_e^{(n)} \le \varepsilon$$

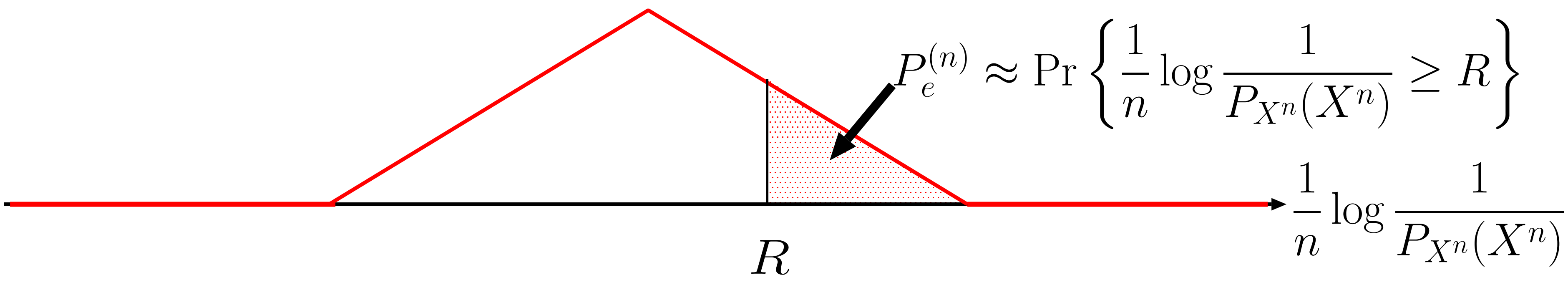
達成可能な R **の下限を** $R_\varepsilon(\boldsymbol{X})$ **と書く.**

定理５ (Steinberg and Verdú, 1996)**：**

$$R_\varepsilon(\boldsymbol{X}) = \overline{J}_\varepsilon(\boldsymbol{X}) \overset{\text{def}}{=} \inf\{R : \overline{F}(R) \le \varepsilon\},$$

ここに

$$\overline{F}(R) = \limsup_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \ge R\right\}$$

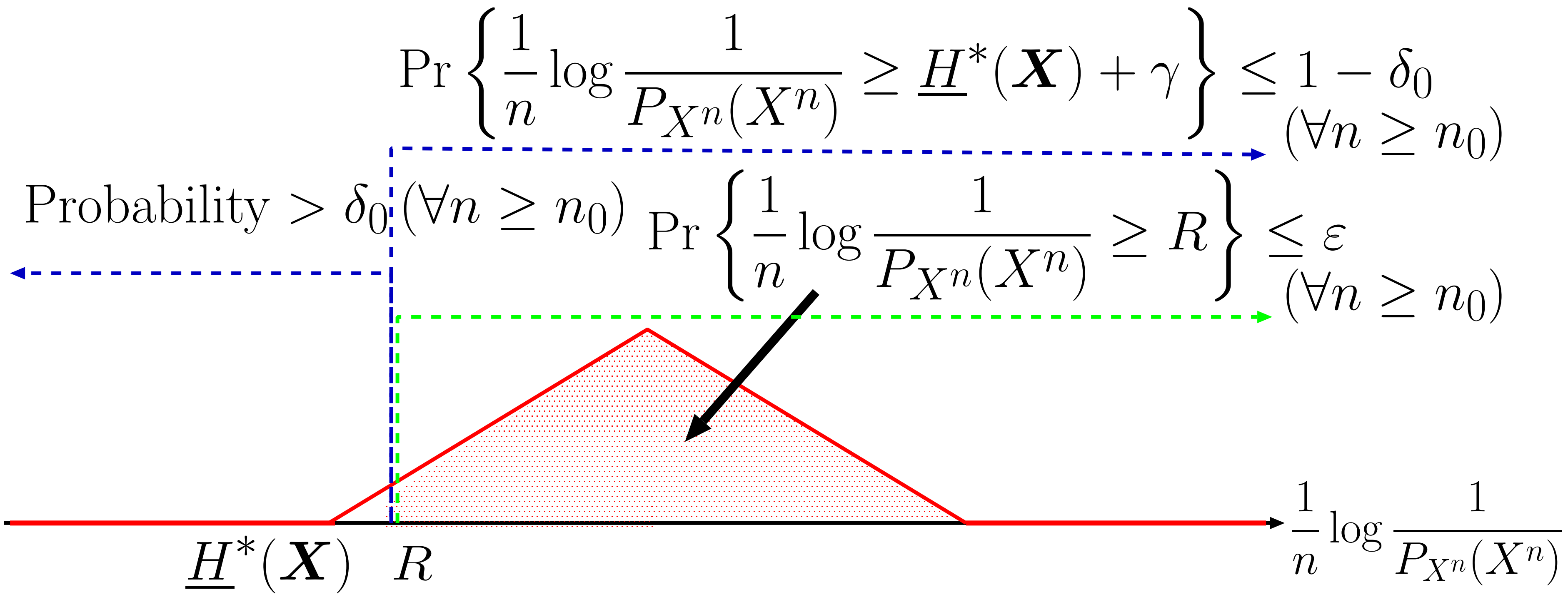


ε-情報源符号化の蔭でも ...

命題２：
一般情報源 $\boldsymbol{X}$ に対して次の性質が成り立つ.

$$R_0(\boldsymbol{X}) = \overline{H}(\boldsymbol{X}), \qquad \lim_{\varepsilon \uparrow 1} R_\varepsilon(\boldsymbol{X}) = \underline{H}^*(\boldsymbol{X})$$

左側の関係式は韓先生の和書に言及あり．右側は（ほとんど）議論されていない.



強い意味でε-達成不可能なレート

定義６：
レートRが強い意味でε-達成不可能 ($\varepsilon \in [0,1)$ **は定数**)
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M_n \le R$$

を満たすすべての符号$\{(f_n, g_n)\}_{n=1}^{\infty}$**は**

$$\liminf_{n\to\infty} P_e^{(n)} > \varepsilon$$

を満たす．強い意味でε-達成不可能なRの上限を$U_\varepsilon(\boldsymbol{X})$と書く．

定理６ (Sato and Koga (2004), Hayashi (2008))**：**

$$U_\varepsilon(\boldsymbol{X}) = \overline{J}_\varepsilon^*(\boldsymbol{X}) = \inf\{R:\ \overline{F}^*(R) \le \varepsilon\}$$

ここに

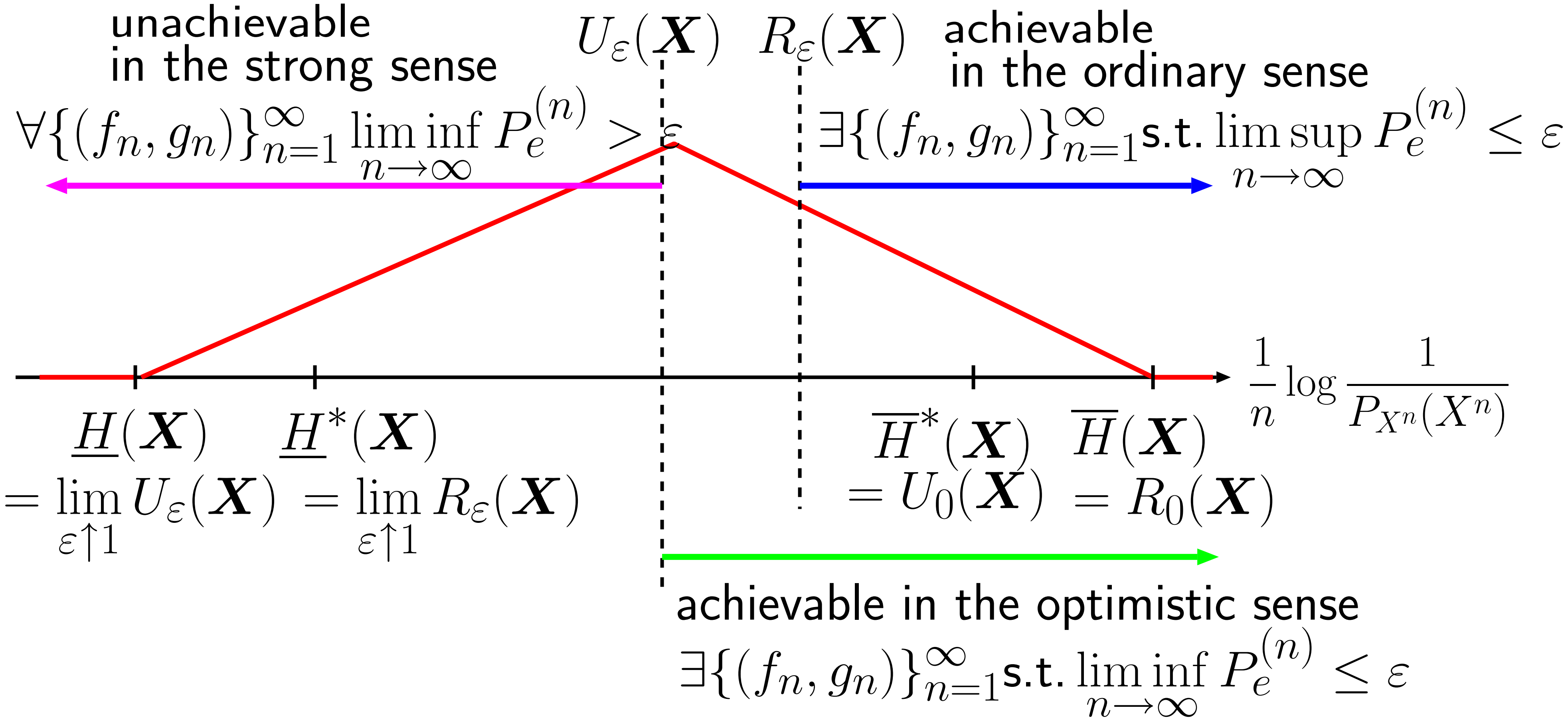
$$\overline{F}^*(R) = \liminf_{n\to\infty} \Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \ge R\right\}.$$

命題３：

$$U_0(\boldsymbol{X}) = \overline{H}^*(\boldsymbol{X}) \quad \text{and} \quad \lim_{\varepsilon\uparrow 1} U_\varepsilon(\boldsymbol{X}) = \underline{H}(\boldsymbol{X}).$$

ε-情報源符号化のまとめ

Rate Constraint $\quad \displaystyle\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log M_n \le R$



強逆性のバリエーション：その１

定義７：$\varepsilon \in [0,1)$ を任意定数．$R < R_\varepsilon(\boldsymbol{X})$ を満たす任意の R に対して，

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M_n \leq R$$

を満たすどんな符号器と復号器の列 $\{(f_n, g_n)\}_{n=1}^{\infty}$ に対しても

$$\liminf_{n\to\infty} P_e^{(n)} > \varepsilon$$

となるとき，情報源は ε **強逆性**をもつという．

強逆性のバリエーション：その１

定義７：$\varepsilon \in [0,1)$ を任意定数．$R < R_\varepsilon(\boldsymbol{X})$ を満たす任意の R に対して，

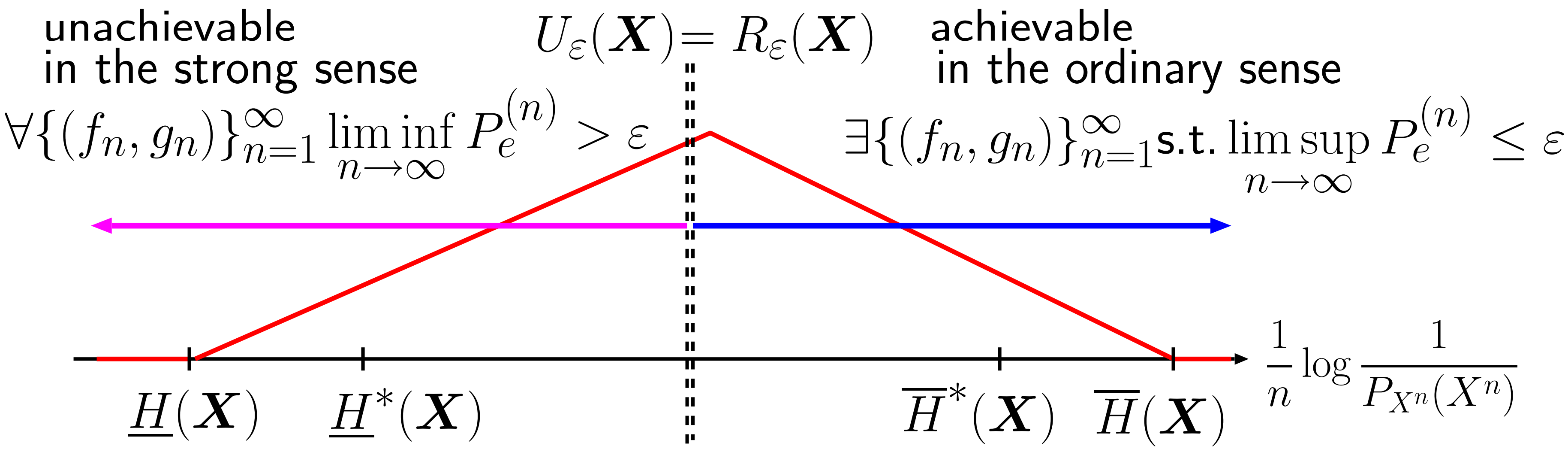
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log M_n \le R$$

を満たすどんな符号器と復号器の列 $\{(f_n, g_n)\}_{n=1}^{\infty}$ に対しても

$$\liminf_{n\to\infty} P_e^{(n)} > \varepsilon$$

となるとき，情報源は ε 強逆性をもつという．

定理７：情報源が ε 強逆性をもつ $\Longleftrightarrow R_\varepsilon(\boldsymbol{X}) = U_\varepsilon(\boldsymbol{X})$．



通常の強逆性

定義８： $R < R_0(\boldsymbol{X}) = \overline{H}(\boldsymbol{X})$ を満たす任意の R に対して，

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M_n \le R \qquad (*)$$

を満たすどんな符号器と復号器の列 $\{(f_n, g_n)\}_{n=1}^{\infty}$ に対しても

$$\liminf_{n\to\infty} P_e^{(n)} = 1$$

となるとき，情報源は**強逆性**をもつという．

定理８ (Han, 1998)**：**
情報源が強逆性をもつ $\Longleftrightarrow \overline{H}(\boldsymbol{X}) = \underline{H}(\boldsymbol{X})$

強逆性のバリエーション：その２

定義９：$R < U_0(\boldsymbol{X}) = \overline{H}^*(\boldsymbol{X})$ を満たす任意の R に対して,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log M_n \le R$$

を満たすどんな符号器と復号器の列 $\{(f_n, g_n)\}_{n=1}^{\infty}$ に対しても

$$\liminf_{n\to\infty} P_e^{(n)} = 1$$

となるとき，情報源は**楽観強逆性**をもつという.

定理９：
情報源が楽観強逆性をもつ $\Longleftrightarrow$ $\overline{H}^*(\boldsymbol{X}) = \underline{H}(\boldsymbol{X})$

原理的に６種類の強逆定理 (相当の定理) が得られる.

Smooth Rényi エントロピー

$X \in \mathcal{X}$ を離散型の確率変数 (確率分布を P_X) とする.

◯ Rényi Entropy (Rényi, 1961)

$$H_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \log \left(\sum_{x \in \mathcal{X}} P_X(x)^\alpha \right)$$

◯ Smooth Rényi Entropy (Renner and Wolf, 2004, 2005)

$$H_\alpha^\varepsilon(X) = \frac{1}{1-\alpha} \log \left(\inf_{Q_X \in \mathcal{B}^\varepsilon(P_X)} \sum_{x \in \mathcal{X}} Q_X(x)^\alpha \right)$$

ここに $\mathcal{B}^\varepsilon(\boldsymbol{p})$ は次式で定まる劣確率分布の集合.

$$\mathcal{B}^\varepsilon(P_X) = \left\{ Q_X \,:\, 0 \le Q_X(x) \le P_X(x) \text{ for all } x \in \mathcal{X} \text{ and } \sum_{x \in \mathcal{X}} Q_X(x) \ge 1 - \varepsilon \right\}$$

【注意】変動距離を用いる流儀もある.

0次のSmooth Rényiエントロピー

$\alpha = 0$ の場合は次の形で書ける (Renner and Wolf, 2005), (Uyematsu 2010)

$$H_0^{\varepsilon}(X) = \min_{\substack{\mathcal{A}\subset\mathcal{X}: \\ \Pr\{X\in\mathcal{A}\}\geq 1-\varepsilon}} \log|\mathcal{A}|$$

Smooth Rényiエントロピーを用いると，ε 情報源符号化におけるConverseの証明が容易になる.

0次のSmooth Rényiエントロピー

$\alpha = 0$の場合は次の形で書ける(Renner and Wolf, 2005), (Uyematsu 2010)

$$H_0^\varepsilon(X) = \min_{\substack{\mathcal{A} \subset \mathcal{X}: \\ \Pr\{X \in \mathcal{A}\} \geq 1-\varepsilon}} \log |\mathcal{A}|$$

Smooth Rényiエントロピーを用いると，ε情報源符号化におけるConverseの証明が容易になる.

命題４：$\varepsilon \in [0, 1)]$を任意定数とする.
$P_e \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Pr\{X \neq g(f(X))\} \leq \varepsilon$を満たす任意の符号器$f : \mathcal{X} \to \mathcal{M} = \{1, 2, \ldots, M\}$と復号器$\mathcal{M} \to \mathcal{X}$に対して$\log M \geq H_0^\varepsilon(X)$が成り立つ.

0次のSmooth Rényiエントロピー

$\alpha = 0$の場合は次の形で書ける(Renner and Wolf, 2005), (Uyematsu 2010)

$$H_0^\varepsilon(X) = \min_{\substack{\mathcal{A} \subset \mathcal{X}: \\ \Pr\{X \in \mathcal{A}\} \geq 1-\varepsilon}} \log |\mathcal{A}|$$

Smooth Rényiエントロピーを用いると，ε情報源符号化におけるConverseの証明が容易になる．

命題４：$\varepsilon \in [0,1)]$を任意定数とする．
$P_e \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Pr\{X \neq g(f(X))\} \leq \varepsilon$を満たす任意の符号器$f : \mathcal{X} \to \mathcal{M} = \{1, 2, \ldots, M\}$と復号器$\mathcal{M} \to \mathcal{X}$に対して$\log M \geq H_0^\varepsilon(X)$が成り立つ．

（証明）いま$\mathcal{D} = \{x \in \mathcal{X} \ : \ x = g(f(x))\}$とおくと，$\Pr\{X \notin \mathcal{D}\} \leq \varepsilon$すなわち$\Pr\{X \in \mathcal{D}\} \geq 1 - \varepsilon$が成り立つ．

よってSmooth Rényiエントロピーの定義と$|\mathcal{D}| \leq M$より

$$H_0^\varepsilon(X) \leq \log |\mathcal{D}| \leq \log M$$

がいえる．

0次Smooth Rényiエントロピーと情報スペクトル

一般情報源 $\boldsymbol{X} = \{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ **に対して，** 0次Smooth Rényi**エントロピーは**

$$H_0^{\varepsilon}(X^n) = \min_{\substack{\mathcal{A}_n \subset \mathcal{X}^n : \\ \Pr\{X^n \in \mathcal{A}_n\} \geq 1-\varepsilon}} \log |\mathcal{A}_n|$$

と書ける.

定理１０ (Uyematsu, 2010)**：**

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} H_0^{\varepsilon}(X^n) = \overline{H}(\boldsymbol{X})$$

$$\lim_{\varepsilon \uparrow 1} \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} H_0^{\varepsilon}(X^n) = \underline{H}(\boldsymbol{X})$$

0次Smooth Rényiエントロピーと情報スペクトル

一般情報源 $\boldsymbol{X} = \{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，0次Smooth Rényiエントロピーは

$$H_0^{\varepsilon}(X^n) = \min_{\substack{\mathcal{A}_n \subset \mathcal{X}^n: \\ \Pr\{X^n \in \mathcal{A}_n\} \geq 1-\varepsilon}} \log |\mathcal{A}_n|$$

と書ける.

定理１０ (Uyematsu, 2010)：

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} H_0^{\varepsilon}(X^n) = \overline{H}(\boldsymbol{X})$$

$$\lim_{\varepsilon \uparrow 1} \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} H_0^{\varepsilon}(X^n) = \underline{H}(\boldsymbol{X})$$

定理１１ (Koga, 2011)：

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} H_0^{\varepsilon}(X^n) = \overline{H}^*(\boldsymbol{X})$$

$$\lim_{\varepsilon \uparrow 1} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} H_0^{\varepsilon}(X^n) = \underline{H}^*(\boldsymbol{X})$$

情報スペクトルの幅

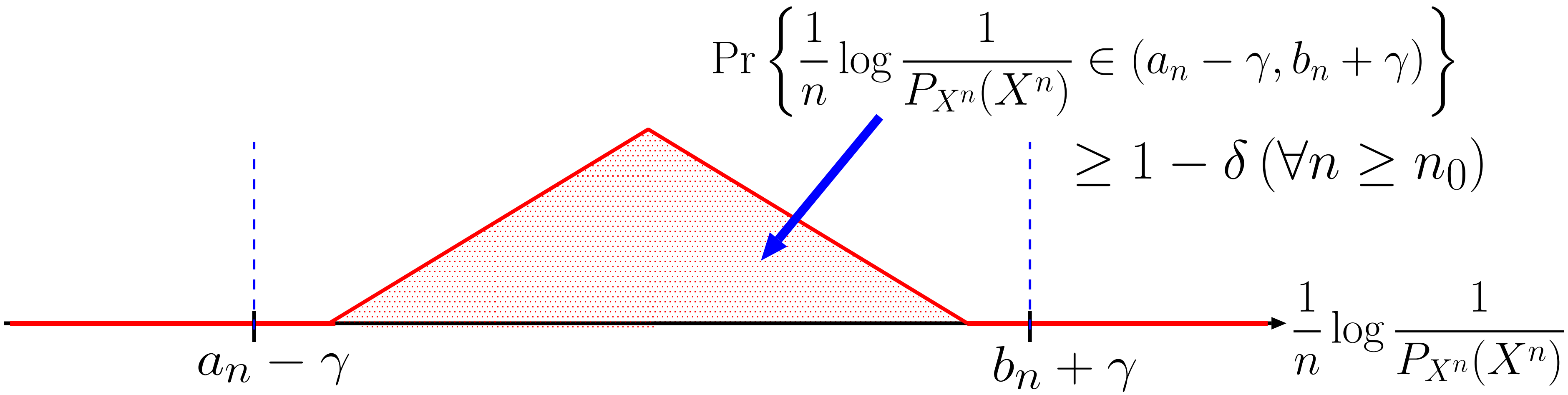
$\overline{H}(\boldsymbol{X}) < \infty$ を仮定すると,

$$W(\boldsymbol{X}) = \inf_{\mathcal{G}} \limsup_{n\to\infty} |b_n - a_n|$$

は情報スペクトルの幅としての意味をもつ (Koga, 2000). ここに

$$\mathcal{G} = \left\{ \{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty} \ : \ \lim_{n\to\infty} \Pr\left\{ \frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \in (a_n - \gamma, b_n + \gamma) \right\} = 1 \text{ for all } \gamma > 0 \right\}.$$

- 情報スペクトルの幅は固定長 Homophonic Coding で導入.
- 固定長符号化の冗長度レートの下限としての意味ももつ (Arimura and Iwata, 2010).



情報スペクトルの幅の例：定常無記憶情報源

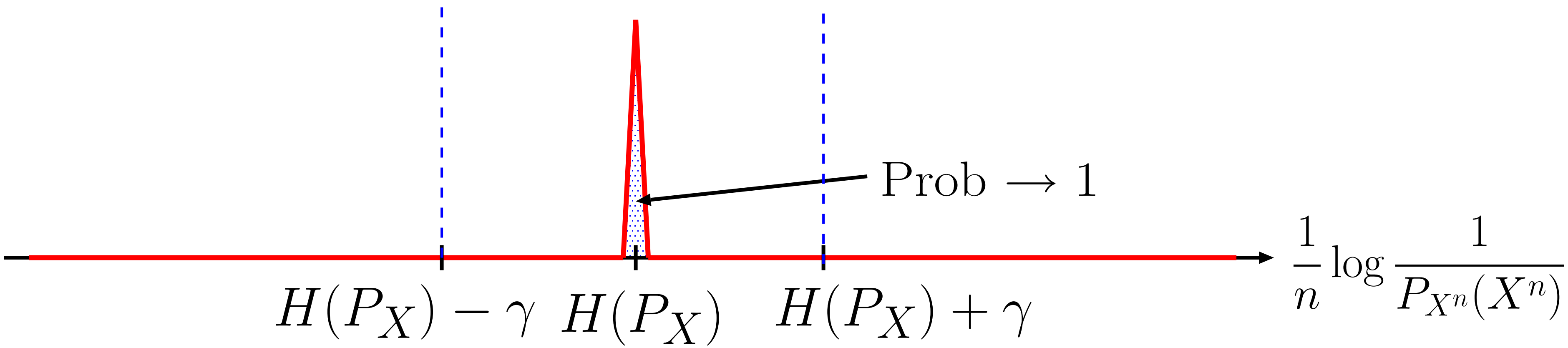
一般情報源 $\boldsymbol{X} = \{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$P_{X^n}(x^n) = \prod_{i=1}^{n} P_X(x_i), \quad \forall n \geq 1$$

によって定義されるとき,

$$W(\boldsymbol{X}) = 0 \qquad (= \overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}(\boldsymbol{X}))$$

区間列 $\{(a_n, b_n)\} \in \mathcal{G}$ を $a_n = b_n = H(P_X)$ として定義.



情報スペクトルの幅の例：混合情報源

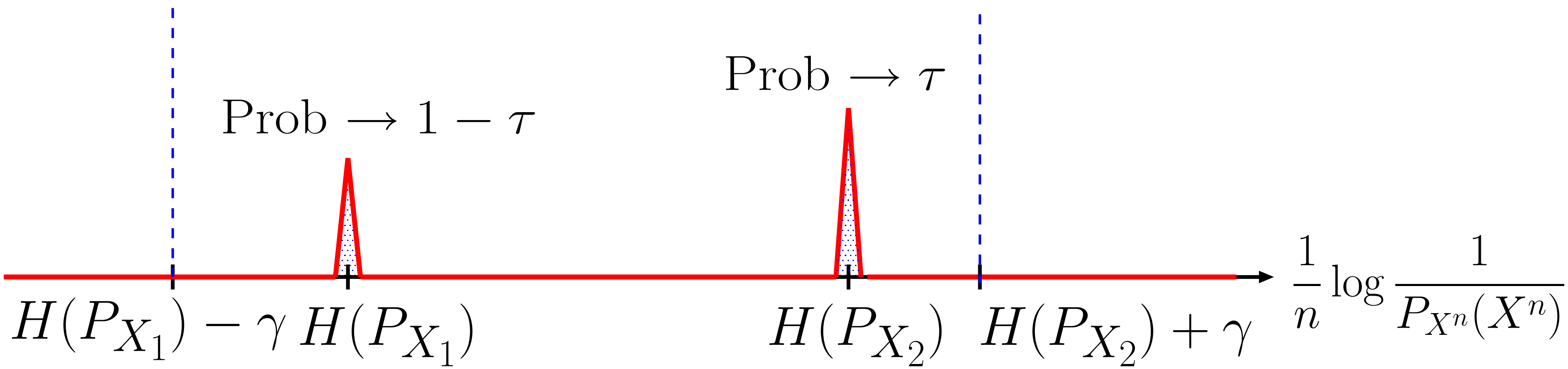
一般情報源 $\boldsymbol{X}=\{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$P_{X^n}(x^n)=(1-\tau)\prod_{i=1}^{n}P_{X_1}(x_i)+\tau\prod_{i=1}^{n}P_{X_2}(x_i),\quad \forall n\geq 1$$

によって定義される $(\tau\in(0,1)$ は定数，$H(P_{X_1})<H(P_{X_2})$ を仮定$)$ とき，

$$W(\boldsymbol{X})=H(P_{X_2})-H(P_{X_1})\qquad (=\overline{H}(\boldsymbol{X})-\underline{H}(\boldsymbol{X}))$$

区間列 $\{(a_n,b_n)\}\in\mathcal{G}$ を $a_n=H(P_{X_1}),b_n=H(P_{X_2})$ として定義.



情報スペクトルの幅の例：振動情報源

一般情報源 $\boldsymbol{X} = \{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ が

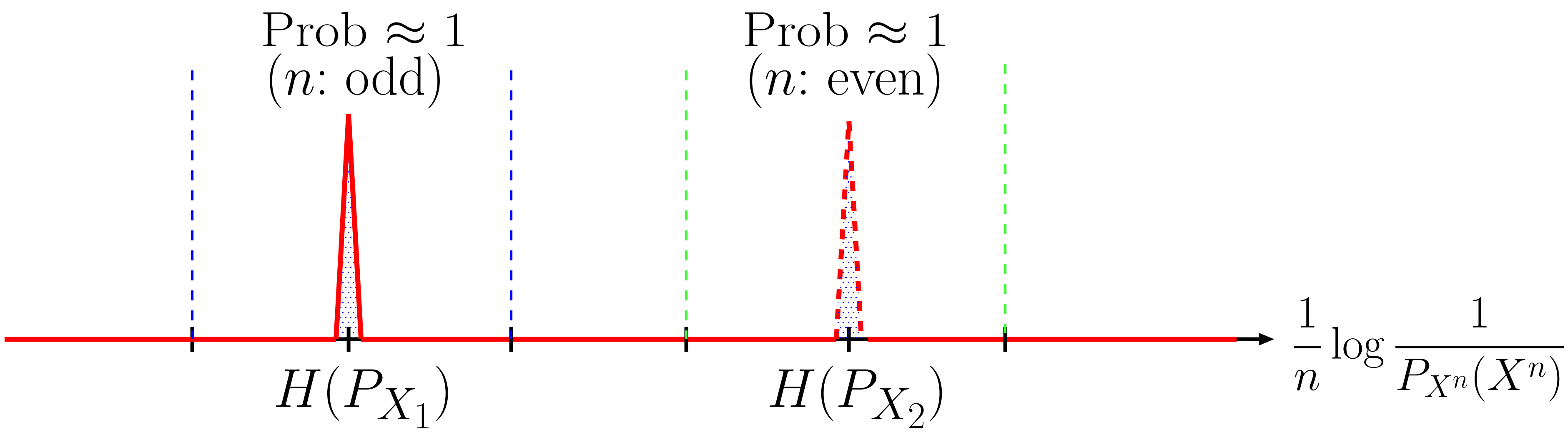
$$P_{X^n}(x^n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} P_{X_1}(x_i) & (n\text{ が奇数のとき}) \\ \prod_{i=1}^{n} P_{X_2}(x_i) & (n\text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

によって定義される $(H(P_{X_1}) < H(P_{X_2})$ を仮定$)$ とき，

$$W(\boldsymbol{X}) = 0 \qquad (\neq \overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}(\boldsymbol{X}))$$

区間列 $\{(a_n, b_n)\} \in \mathcal{G}$ を次式で定義する．

$$a_n = b_n = H(P_{X_1}) \quad (n\text{: odd}), \qquad a_n = b_n = H(P_{X_2}) \quad (n\text{: even})$$



情報スペクトルの幅の上界

命題 5 (Koga, 2000)**：**

一般情報源 X **に対して次の不等式が成立.**

$$W(\boldsymbol{X}) \leq \overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}(\boldsymbol{X})$$

情報スペクトルの幅の上界

命題5 (Koga, 2000)：
一般情報源 X に対して次の不等式が成立.

$$W(\boldsymbol{X}) \le \overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}(\boldsymbol{X})$$

証明は容易. $\overline{H}(\boldsymbol{X}), \underline{H}(\boldsymbol{X})$ **の定義より，任意の** $\gamma > 0$ **に対して**

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \le \overline{H}(\boldsymbol{X}) + \gamma\right\} \to 1 \quad (n \to \infty)$$
$$\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \le \underline{H}(\boldsymbol{X}) - \gamma\right\} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

が成り立つので，

$$\Pr\left\{\frac{1}{n}\log\frac{1}{P_{X^n}(X^n)} \in (\underline{H}(\boldsymbol{X}) - \gamma, \overline{H}(\boldsymbol{X}) + \gamma)\right\} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

がいえる．よって $\{(\underline{H}(\boldsymbol{X}), \overline{H}(\boldsymbol{X}))\} \in \mathcal{G}$ **であり，**

$$W(\boldsymbol{X}) = \inf_{\mathcal{G}} \limsup_{n\to\infty} |b_n - a_n| \le \overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}(\boldsymbol{X})$$

情報スペクトルの幅の下界

命題６ (Koga, 2011)**：**
一般情報源 $\boldsymbol{X}$ **に対して次の不等式が成立.**

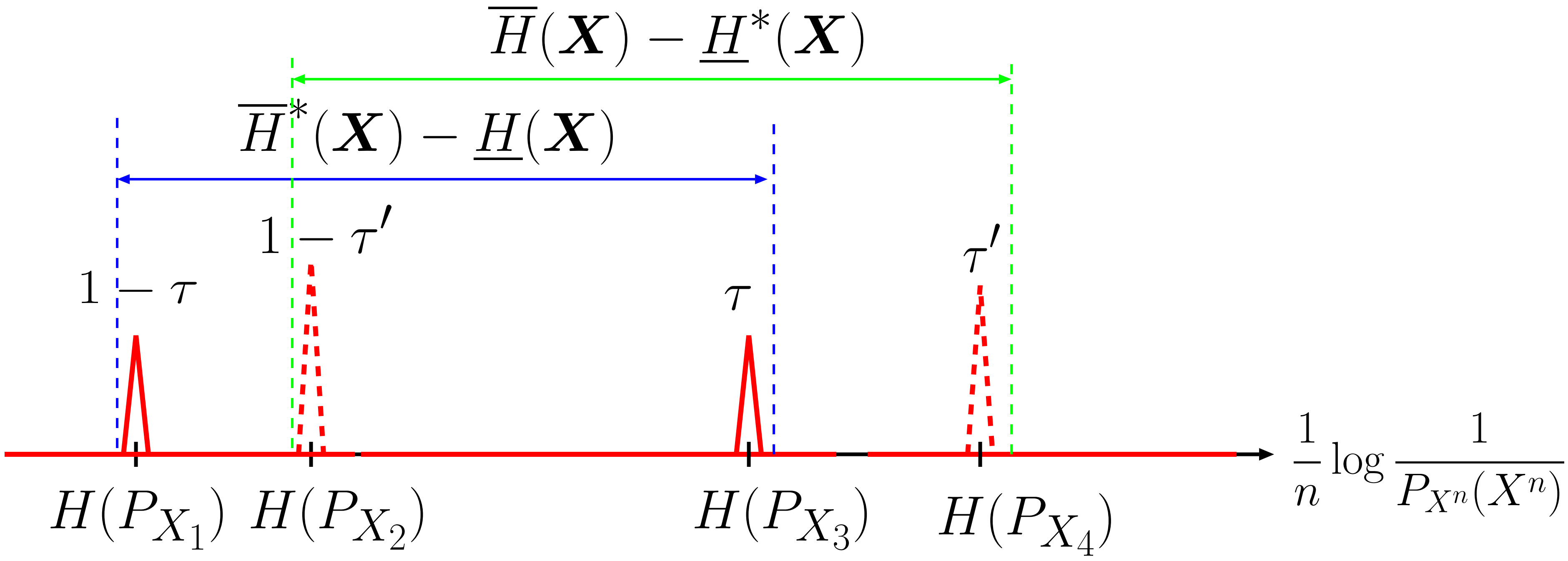
$$W(\boldsymbol{X}) \geq \max\{\overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}^*(\boldsymbol{X}), \overline{H}^*(\boldsymbol{X}) - \underline{H}(\boldsymbol{X})\}$$

情報スペクトルの幅の下界

命題6 (Koga, 2011)**：**
一般情報源 X に対して次の不等式が成立.

$$W(\boldsymbol{X}) \geq \max\{\overline{H}(\boldsymbol{X}) - \underline{H}^*(\boldsymbol{X}), \overline{H}^*(\boldsymbol{X}) - \underline{H}(\boldsymbol{X})\}$$

下界を達成する例（振動する混合情報源）：



まとめ

4 種類の確率的極限で定義された量の，一般情報源の符号化における基本的な性質を調べた.

- 大小関係と正準性
- 強い意味で達成不可能なレートの上限
- 強逆定理のバリエーション
- 0 次の smooth Rényi エントロピーとの関係
- 情報スペクトルの幅の上界・下界
- Slepian-Wolf の問題における強い意味で達成不可能な領域の内界

これらの性質は，従来着目されていなかった $\overline{H}^*(\boldsymbol{X})$, $\underline{H}^*(\boldsymbol{X})$ の有用性を示している.

他の情報源符号化問題への応用：

$\Longrightarrow$ 有村先生へ

おまけ

名前を募集します !!

$\overline{H}(\boldsymbol{X})$: **スペクトル上エントロピーレート**

spectral sup-entropy rate

$\underline{H}(\boldsymbol{X})$: **スペクトル下エントロピーレート**

spectral inf-entropy rate

となっているので

おまけ

名前を募集します !!

$\overline{H}(\boldsymbol{X})$: **スペクトル上エントロピーレート**

spectral sup-entropy rate

$\underline{H}(\boldsymbol{X})$: **スペクトル下エントロピーレート**

spectral inf-entropy rate

となっているので

$\overline{H}(\boldsymbol{X})$: **スペクトル上半(うえはん)エントロピーレート**

spectral sup-semientropy rate

$\underline{H}(\boldsymbol{X})$: **スペクトル下半(うえはん)エントロピーレート**

spectral inf-semientropy rate

としようと思います.