技術の原点

# なぜ精度保証付き数値計算の研究を追求したか
## —私の研究の原点—

Why Research on Numerical Computation with Result Verification?
—My Motivation—

大石進一 Shin'ichi OISHI

**アブストラクト　筆者は 1976 年の卒論より研究をスタートしました。すでに 32 年間研究に携わってきたことになります。筆者が精度保証付き数値計算の研究に移ったのは 1990 年のことです。以来本分野で研究を続けてきました。精度保証付き数値計算の研究の研究に移ったのは筆者なりの必然性があります。1990 年当時の精度保証付き数値計算の研究は実用的ではないと考えられていたような気がします。実際、数百次元の連立一次方程式の精度保証が精一杯の感じでありました。現在では特殊な構造を持つ方程式であれば一億次元の連立一次方程式でも精度保証できるようになり、精度保証付き数値計算は実用の段階に至っていると思っています。筆者の研究がこのようなブレークスルーに貢献できたと考えておりますが、本稿ではこのような精度保証付き数値計算の研究の発展と筆者の研究の個人史の交錯を描かせていただきました。**

**キーワード　精度保証付き数値計算，区間演算，誤差無し変換，丸めの誤差制御による精度保証付き数値計算**

## 1. はじめに

筆者は非線形波動ソリトンの研究を 1976 年に提出した卒論から開始した．廣田の双線形化法によりソリトン方程式の初期値問題が解けることを示して 1981 年に博士学位を頂いた（文献（1），(2）などが基礎となる）．二次元 KdV 方程式である Kadmtsev-Petviashivili 方程式の N-ソリトン解の行列表示を求めた．それにより，一般化ソリトン解を構成した．そして，それが，Fredholm 行列式であることを示した．余談になるが，Kadmtsev-Petviashivili 方程式を KP 方程式と略すことはこの結果を書いた論文(1) の中で，筆者が始めた．この方程式が重要と思われて，頻繁に人々がその名前を呼ぶことになったら，こんなややこしい名前で呼ぶことはないだろうと考えたからである．KdV 方程式は Korteweg-de Vries 方程式の略である．ならば，KP 方程式と略すのが自然だと考えた．この論文のプレプリント（一般的な双線形方程式の一般化ソリトン解を求めた論文)(1) を佐藤幹夫先生のグループ（三輪哲治先生と神保道夫先生（当時は京都大学数理解析研究所の助手であった））にお渡しした．佐藤学派が KP 方程式と呼ぶようになって，KP 方程式という名が世界に広まった．佐藤学派は KP 方程式と呼ぶのがソリトン研究者の間の慣習と思われたのであろう．佐藤先生がソリトン方程式系が無限次元グラスマン多様体上のプリュッカー座標系をなすことを示すのに筆者のプレプリント(1) も少し役立ったのではないか．実際．A 型の無限次元リー環をなすソリトン方程式の相互作用項の一般系は KP 方程式の相互作用項と同じ形となっており，これは KP 方程式の行列表示を導くときに筆者が明らかにした構造になっている．

後に，廣田良吾先生が佐藤グループの仕事のすごいところの一つとして，KP 方程式のソリトン解を行列形式にした点であると筆者に話された．しかし，KP 方程式のソリトン解の行列表示は筆者が求めて，それを書いた論文のプレプリント(1) を佐藤グループに差し上げたのであると廣田先生にお話しした．そして，その論文を廣田先生の著書に引用して頂いた(3).

このようにいろいろな経緯はあるが，ソリトン方程式の研究として筆者が目指していた方向は，ずっと後からソリトン研究に参入した佐藤学派によって，ずっと先まで明らかにされてしまった．筆者にはそれは高性能な爆弾がソリトン研究の神秘の花畑に落ちて，不思議さも何もない荒野にしてしまった出来事のように感じた．数学の威力とはかくもすさまじいものであるのかと実感した．

これはちょうど，私の学位取得の直後の出来事であった．私は，ソリトン研究を続けるべきかどうか迷った．ソリトン研究でも論文を書ける自信はあった．しかし，佐藤理論を超えるような，革新的な理論を作れるかどうかは全く自信がなかった．羅針盤のない航海をして偶然宝の山を見つけられるのか．そのような不安が襲った．

私は決心した．佐藤幹夫先生の絶対やらないような分野の研究をしよう．そう，正反対の方向．佐藤学派の目指すのは代数構造のきれいな分野である．それなら，代数構造のない分野をやろう．私が，ソリトンに興味を持ったのは非線形偏微分方程

大石進一　正員：フェロー　早稲田大学理工学術院応用数理学科
E-mail　oishi@waseda.jp
Shin'ichi OISHI, Fellow (Faculty of Sciences and Engineering, Waseda University, Shinjuku-ku, 169-8555 Japan).
Fundamentals Review Vol.2 No.2 pp.9–19 2008 年 10 月

式なのに完全に初期値問題が解けてしまうという不思議であった．やはり，非線形方程式を厳密に解くことにしよう．しかも代数構造を持たない非線形方程式を厳密に解く方向で，佐藤学派がやり遂げたような革新的なことがしてみたい．ひそかにそのように決心したことを昨日のように覚えている．

方向転換をするに当たり，私は次の宝の山を探し始めた．28歳のことである．私の最初の研究であるソリトン研究で得た研究の知恵は新しいキーワードの入った分野をやると論文が書きやすいということであった．新しいキーワードが入っていればそこだけは最低限の新規性があるからである．そのときに，小島政和先生の著書「相補性と不動点：アルゴリズムによるアプローチ」[4]が私の目に飛び込んできた．私の恩師は堀内和夫先生で，堀内先生は電子情報通信分野の数学的研究に関数解析を初めて持ち込まれた研究者の一人である．堀内先生の最大の武器は不動点定理である．この不動点を数値計算で求める新分野が不動点アルゴリズムの研究分野であるらしい．早速，その本を熟読し，不動点アルゴリズムの本質がホモトピー法であることを理解した．ホモトピー法によって必ず解が求められる条件を探すのが本分野の一つの研究スタイルである．この分野の先駆者として電子情報通信分野ではカッツネルソン法を拡張した藤沢俊男先生，A.Kuh 先生，大附辰夫先生の研究があることを知った．また，数理計画法の種々の問題が不動点アルゴリズム研究の発端であることを知った．こうして，私は不動点アルゴリズムの研究をスタートした．論文はたくさん書けた．奇ホモトピー法や無限次元ホモトピー法の提案などもできた．無限次元ホモトピー法の研究から，フレッドホルム作用素などの非線形関数解析的手法も用いるようになった．ホモトピー法で必ず解ける問題（非線形抵抗回路の動作点を求める問題はその例である）は大域的な非線形解析の適用される問題である．そこでは数値計算によって必ず最後には解が求められる．このことをもう少し厳密にいうためにニュートン法の収束定理を用いることにした．すなわち，大域的に解ける非線形方程式に対しては，ホモトピー法を用いると，最後にはニュートン法の収束定理の条件が満たされ，厳密解が求められることを示した．これは，不動点定理による非線形方程式の解の存在定理を構成的な定理にしたことに等価となっている．

ニュートン法の収束定理との出会いは，筆者にまた一つの転回点を与えた．世界的にはカントロビッチの定理として知られているが，日本国内では占部実の定理[5]として知られている．正確には占部の定理は簡易ニュートン法の収束定理でカントロビッチの定理より少し条件がきつくなっている．しかし，応用上はそれは余り大差はない．占部実という先生のことが気になりだして，いろいろ調べた．数値計算の学者として世界的に著名な先生であることが分かった．

このような時期に，正確には 1990 年に中尾充宏先生（九州大学）の二つの解説が岩波書店の発行する雑誌「数学」[6]と情報処理学会の会誌[7]に掲載された．共に「精度保証付き数値計算」のサーベイであった．数値計算のすべての誤差を完全に把握して，非線形偏微分方程式の解の包み込み（存在）と局所的一意性を示すことができるという内容であった．この二つのサーベイを眺めて次に進むべき私の方向は，この精度保証付き数値計算の考えを入れて非線形方程式の厳密解を構成することであるとすぐに直感した．37 歳であった．若手の教授として，幾つかの分野の研究も経験し，ある意味で大人として，本格的に研究成果を上げる時期が到来した．こうして私は精度保証付き数値計算の研究分野に参入した．以下の各章では，精度保証付き数値計算の研究が実用的な段階に移行するまでの発展の経緯を私なりに描いてみたい．

## 2. 1990 年当時の研究状況

精度保証付き数値計算の研究は日本に一つの起源を持つ．須永照男（元九大）氏が東大修士課程在学で書いた修士論文が区間解析の発祥の一つであるとされている．1950 年代のことである．このほかにも区間解析の発祥といわれる起源が幾つか世界で紹介されている．須永の論文[8]は大変優れたもので，非常に高い意図が見て取れる．いずれにしても，区間演算が定義され，区間解析が提唱されたのは 1950 年代であることは確実で，コンピュータの発明が 1940 年代であるので，その後 10 年以内には区間解析が発案されたことになる．

後に必要となるので区間演算の概要を簡単に述べよう．数値計算のためにコンピュータで扱える数は現代のアーキテクチャでは浮動小数点数である．1985 年以降 IEEE754 の 2 進の浮動小数点数規格が制定され，32bit の単精度と 64bit の倍精度浮動小数点数が制定された．$\mathbb{F}$ を扱っている浮動小数点数の集合としよう．これは有限集合で，通常有理数の部分集合である．実数の集合を $\mathbb{R}$ とすると $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}$ で，$\mathbb{R}$ には $\mathbb{F}$ に含まれない要素が存在する．例えば，円周率 $\pi$ を考えよう．区間解析では

$$\pi \in [3.14, 3.15], \quad （仮に\ 3.14, 3.15 \in \mathbb{F}\ としておこう） \tag{1}$$

のように両端が $\mathbb{F}$ に入る区間で $\pi$ を表現する．同様に，

$$\sqrt{2} \in [1.41, 1.42], \quad （ここでも\ 1.41, 1.42 \in \mathbb{F}\ とする） \tag{2}$$

とする．このとき，もし，$\pi + \sqrt{2}$ の情報をこれだけのデータから得ようとすると，$\pi + \sqrt{2}$ の最小値は $\pi$ の取り得る最小値 3.14 と $\sqrt{2}$ の取り得る最小値 1.41 の和 4.52 になり，$\pi + \sqrt{2}$ の最大値は $\pi$ の取り得る最大値 3.15 と $\sqrt{2}$ の取り得る最大値 1.42 の和 4.57 になる．よって，

$$\pi + \sqrt{2} \in [4.52, 4.57] \tag{3}$$

と計算することができる．これを一般化して，区間 $[a, b]$ と $[c, d]$ の和は

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d] \tag{4}$$

と定義するのがよさそうである．これが区間演算の加算である．同様な考え方で区間同士の減算，乗算，除算も定義できる．これを区間演算という．区間演算は区間の両端の数の演算で定義

できるので有限回の四則演算で計算できる．基本的にはこれが須永氏をはじめとする区間演算の創始者たちの発想である．もちろん，須永氏の論文の中にはもっといろいろなアイデアがある．しかし，単純には区間演算の考え方は，精度保証付き数値計算の原理として次のような簡単な方法論を与えたため，非常に多くの注目を集めた： **(単純な精度保証付き数値計算の原理) 有限回の四則演算で解が求められる数値計算の問題を考えよう．典型的には連立一次方程式のガウスの消去法による解法などの直接法と呼ばれる手法である．このとき，実数を区間に，実数の四則演算を区間演算に置き換えると，区間版のアルゴリズムができる．この区間版のアルゴリズムによって計算された結果は真の解を含み，その区間幅が誤差となる．**

この手法の代表的な適用例が区間ガウスの消去法である．区間ガウスの消去法によって，連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算法が与えらた．このように,「単純な精度保証付き数値計算の原理」を直接法に適用すると新しい精度保証付き数値計算法が構築できるので，幾らでも論文が書けるということになって，区間解析の研究の第一のブームが 1960 年代に訪れた．R. Moore の教科書[9]が著され，区間演算がポピュラーとなったこともブーム到来の一因と思われる．しかし，このブームは長くは続かなかったようである．それは，単純な精度保証付き数値計算の原理では，いろいろな困難が現れるからである．

まず，区間を数とみなすと四則演算は区間演算に置き換えられるが，比較演算がすべての区間については定義されない．例えば，$[1,3] \leqq [4,6]$ とは定義してよさそうであるが，$[2,5]$ と $[4,6]$ はどちらが大きいかは定義できない．すなわち，実数の束としての性質が失われる．実は詳しくは，分配側等が区間演算については成立しなくなるので実数の体としての性質も，区間演算については失われる．更に，

$$[1,2]+[2,3]=[3,5], \quad [1,2]-[1,2]=[-1,1] \qquad (5)$$

となるように，区間幅が 1 の二つの区間を足したり減じたりすると，区間幅が 2 の区間が得られる．区間幅を情報量と考えると，区間演算によって単調に情報量が落ちる．すなわち，区間演算は情報量を失う計算になっているので，大規模な計算を行うと，得られた結果は区間幅が非常に膨大になってしまって，意味のある計算とみなされなくなる．また，ガウスの消去法は消去の過程で，零を含む区間による零割が発生し，行列が正則でも，区間ガウスの消去法によって必ずそのアルゴリズムが成功して停止するとは限らない．結果として，数百次元程度の連立一次方程式を解くのが精一杯であることが分かった．これでは，全く実用的でないということになった．こうして，多くの研究者は区間解析の分野から去り，精度保証付き数値計算は実用的でないという評判が残ったのである．

ところが，区間解析を地道に研究するグループが幾つか残った．そのグループの一つはドイツのグループ[10],[11]で，ここでその後，新しいブレークスルーがもたらされた．区間演算によって情報量が失われる最も大きな原因は，実数演算では $x-x=0$ であるが，$[a,b]-[a,b]=[a-b,b-a]$ となって零とならないことである．これは，二つの区間が同じ量を表しているのではなくて，別の量であると考えることによる．すなわち，$X=[a,b], Y=[a,b]$ として，$X-X$ を計算するときと $X-Y$ を計算するときで，前者を 0 とし，後者を $[a-b,b-a]$ と（自動的に）計算するような手法があると区間演算の改良になる．これを達成する一つの手法として，平均値形式が考案された．すなわち，$f(x)$ を変数 $x$ に関する四則演算によって計算できる式とするとき，$x=[a,b]$ として $f(x)$ を評価することを考える．このとき，$f([a,b])$ として，区間演算で評価すると，区間演算によって情報が単調に減少することにより，相当な過大評価が起きるときがある．これに対して，平均値形式では

$$f_M([a,b]) = f(\frac{a+b}{2}) + f'([a,b])([a,b]-\frac{a+b}{2}) \qquad (6)$$

と評価する．明らかに，$f([a,b]) \subset f_M([a,b])$ である．例えば，単純に $f(x)=x-x$ とすると，単純な区間演算では $f([a,b])=[a,b]-[a,b]=[a-b,b-a]$ と計算するが平均値形式では $f(x)=0, f'(x)=1-1=0$ であるので

$$\begin{aligned} f_M([a,b]) &= f(\frac{a+b}{2}) + f'([a,b])([a,b]-\frac{a+b}{2}) \\ &= 0 + 0 * [-\frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2}] = 0 \end{aligned} \qquad (7)$$

となる．よって，$f([a,b]) \subset f_M([a,b]) = 0$ から $f([a,b])=0$ が結論される．すなわち，平均値形式は，$X-X$ を計算するときと $X-Y$ を計算するときで，前者を 0 とし，後者を $[a-b,b-a]$ と計算するような手法となっている．こうして，区間演算に平均値形式を併用すると，計算が進む中で情報量が単調に減るだけではなく，区間幅が狭くなるような情報量の生成が起きることも分かった．

さて，非線形方程式の解法としてのニュートン法は反復解法であるが，その収束定理であるカントロビッチの定理の条件は直接解法だけで計算することができる．その直接解法に区間演算を用いれば，反復解法でも精度保証法に拡張することができる．ニュートン法の収束定理の成立をチェックする代わりに，ニュートン法に平均値形式を組み合わせたクラフチック法も開発され．ニュートン法の収束定理を直接区間演算により検証する方法も開発された．

平均値形式の利用やニュートン法の収束定理の利用による精度保証付き数値計算においては，アルゴリズムで定義される関数の微分が必要となる．アルゴリズムで定義される関数は人間にとって目に見える形で定義されているとは限らない．このとき，アルゴリズムの自動微分という概念が提案された．これも，新たなブレークスルーであった．伊理正夫先生はこの方面で高速自動微分を定義して大変良い成果を得ていた[12].

一方，1985 年には区間演算を計算機で実装しやすくすることを念頭に IEEE754 の倍精度浮動小数点規格が制定された．この制定に当たっては優れた数値計算の学者である Kahan が主導的な役割を果たした．これにより，区間演算は丸めのモードの変更により簡単にプログラム化できることになった．

更に，ニュートン法の収束定理であるカントロビッチの定理は

無限次元関数空間上の非線形作用素方程式にも適用できる．そして，その条件が有限次元関数に対する区間演算だけで検証できるようになる場合があることをが示された．これにより，微分方程式や関数方程式の解の存在と局所一意性も精度保証付き数値計算によって示すことができることが示された．微分方程式の解の存在検証については日本では 1965 年以来，占部実[5]と占部学派による非線形振動にかかわる周期解の計算機援用存在証明の結果がある．これは世界的に著名な研究成果である．1990 年というのは中尾充宏は中尾法を創始して，だ円形の偏微分方程式をはじめとして偏微分方程式の解の数値存在証明の研究に着手したところであった．

## 3. 微分方程式の精度保証

以上のような状況の中で筆者は精度保証付き数値計算の研究を開始したわけであるが．当然筆者のモチベーションは非線形微分方程式の解の数値的存在検証にあった．できれば，カオスの計算機援用解析の手法を精度保証付き数値計算を基に構築したいというのも意識した方向性であった．そこで，まず，丸め誤差の把握については，有理数演算を基にした数値計算により簡単に行い，非線形常微分方程式の周期解の存在検証を行ってみることにした．

自動微分やフーリエ級数の計算などに演算子多重定義を用い，非常に簡単にガレルキン方程式（決定方程式ともいう）が導出できるのに驚いた．また，有理数演算により，数値計算の誤差が厳密に押さえられた．ただし，有理数演算では 100 次元連立一次方程式の逆行列を計算するのに 1 時間から一晩かかることが分かった．ダフィング方程式の周期解とその分岐の精度保証付き数値計算を用いた存在証明ができた．この辺の結果をハワイで開催された NOLTA で発表したとき，非線形常微分方程式の分岐現象のソフトウェア AUTO (SOFTWARE FOR CONTINUATION AND BIFURCATION PROBLEMS IN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS) の作者として有名な E. Doedel がわざわざ会いに来てくれて，ホモクリニック軌道が計算できないかと質問してきた．私の定式化そのままではホモクリニック軌道の計算は無理そうであったので，クラフチック法を常微分方程式に拡張した形の定式化を行い，簡単な例についてはホモクリニック分岐点の包み込みが可能であることを示した．この結果をフランスで開かれた SCAN で発表したが，論文の査読結果が査読者全員満点で，大いに褒めてもらった．これを本学会英文論文誌に投稿[13]したら猪瀬賞を頂いた．こうしてこの手法により，ローレンツ方程式のホモクリニックポイントの包み込みを試みることにした．すなわち，ローレンツ方程式のホモクリニック軌道の 300 次元多項式（実際にはチェビシェフ多項式近似）近似求め，その近くに真のホモクリニック軌道が存在することを示そうとした．この計算にはニュートン法を用いるが，その 1 反復が 1 日を超えることが判明した．しかも，精度保証がかかるにはもっと高次元の近似が必要そうであった．こうして，実際の力学系の未解決問題に精度保証付き数値計算法を応用しようとすると，ニュートン法の基礎をなす線形計算の高速化が必要であると強く実感するようになった．すなわち，精度保証付き数値計算の基礎がいまだ不十分であることを痛感したのである．ここまでの，微分方程式や関数方程式の解の精度保証法については，文献（14）にまとめた．

このようなときに，早稲田大学で精度保証付き数値計算のシンポジウムを開催し，ドイツハンブルグ工科大学のルンプ教授も招待した．彼と国際シンポジウムの会期中に議論した中で，

**「精度保証付き数値計算のアルゴリズムは，近似解を求めるアルゴリズムに比して，どのくらいの速さかを議論する必要がある．理想的には，近似解を求めるのと比べて 2 倍から数倍程度が望ましい．筆算の検算でももう一度計算する程度の手間はかけているからである．従来の精度保証法に比べて何倍速くなったでは，ユーザが魅力を感じない．」**

という指導原理の重要性を共に認識し，共同研究することとした．その結果，線形連立一次方程式の数値解の高速精度保証法を開発することができた[15]．これは，ガウスの消去法を実行するのと同じ手間で，数値解の精度保証ができることを示したもので，従来は近似解を求めるのに対して，1,000 倍から 1 万倍程度かかっていた精度保証が 1 倍でできることを示したものである．この結果，連立一次方程式の精度保証は一気に実用段階に到達した．この方法の原理は，区間演算が基本演算であるという考えを捨てたところにあり，正にコロンブスの卵的なアイデアであった．区間演算の基本的精神は，数を区間に置き換え，四則演算を区間演算に置き換えることにより，精度保証付き数値計算ができるということであった．このため，区間演算は精度保証付き数値計算における基本演算と思い込み，これを高速化することを考えてきたというのが歴史であった．しかし，区間の集合は体としての性質も，束としての性質も失ったように，区間と区間演算は実数へ至る中間段階のものであった (文献（14）の第 8 章の議論参照．その中では，入れ子の区間の無限列を用いた実数の定義について論じている．この定義において，区間演算は実数の演算を定義するための中間物として利用されている）．新しい精度保証法の基本的アイデアを述べると次のようになる．IEEE754 の 2 進浮動小数点数規格が 1985 年に制定されたが，この規格の中には浮動小数点数演算を切り捨て，切り上げ，最近点への丸め，チョッピングで行う四つの丸めのモードが定義されている．これは制定に携わった Kahan が区間演算を数値計算プログラム中で容易に実装できることも念頭に置いたからと聞いたことがある．丸めのモードの変更の命令で切り捨てに変更する命令を down(), 切り上げに変更する命令を up() と表す．$A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ として

$$down();$$
$$L = A * B;$$
$$up();$$
$$U = A * B;$$

と計算すると $AB \in [L, U]$ が成立することが分かる．ただし，行列の区間 $[L, U]$ とは，$[L_{ij}, U_{ij}]$ を第 $ij$ 成分とする行列のことである．また，$X \in [L, U]$ とは $X_{ij} \in [L_{ij}, U_{ij}]$ がすべての第 $ij$ 成分について成立することをいう．この計算においては丸めのモードの変更を 2 回するだけで，二つの行列の積の包み込み $[L, U]$ が求められることが分かる．一方，これまでは，例えば二つの区間 $[a, b]$ と の $[c, d]$ の区間演算の和 $[e, f] = [a, b] + [c, d]$ を

$down()$;

$e = a + c$;

$up()$;

$d = b + d$;

$near()$;

と定義し，二つの行列の積に現れる各実数を区間にそして四則演算を区間演算に置き換える方法であったから，行列の積を計算するのに $n^3$ に比例する丸めの変更が必要であった．丸めのモードの変更は浮動小数点演算を規定するレジスタの中身を書き換えることにより行われるので通常，3 サイクル演算量がかかる．また，区間演算を演算子多重定義すると高速線形計算ルーチンである BLAS の関数が用いられなくなるなどのオーバヘッドが生じる（10 倍の手間）．演算子多重定義によるオーバヘッドも 10 倍計算速度が遅くなる程度と見積もれる．区間演算の手間で計算量が 10 倍遅くなるので，行列の積を浮動小数点演算で近似的に計算するのに比べて，その精度保証には 1,000 倍ほどの計算量が必要となる．これに対して，我々の新算法では 2 度浮動小数点数の行列の積を計算するだけでよいので（これは無視できる程度），行列の積の包み込みの計算量は行列の積の近似計算の計算量の 2 倍にしかならない．プログラミングも，単に今までの計算機環境の中に丸めのモードの変更の命令さえ加えることができれば，丸めのモードを down() と up() に切り換えて，2 度行列の浮動小数点数による通常の積計算をすればよいので，計算機環境の何の変更もなしに，行列の積の包み込みが計算できる．これに対して，区間演算を用いるときは，従来のプログラムを捨てて，新規にプログラムを書かなければならないという不利な点がある．こうして，新方式は，プログラミングが非常に簡単にでき，どんな計算環境でも精度保証できるというスケーラビリティを持ち，かつ近似計算に比べて 2 倍の手間で精度保証できるという良いことずくめの性質を持つことが分かった．これは 1999 年ぐらいに発見したので，精度保証の研究を始めてほぼ 10 年が経過していたことになる．区間演算に対してベクトル区間演算による精度保証法の誕生である．区間演算が基本演算であるとすり込まれていたために，このような単純な変更で，かくも効果の著しい改善ができるとは想像もしていなかった．基本的なところでイノベーションを果たすには 10 年の歳月が必要であったということになる．

$$Ax = b,\ A \in \mathbb{F}^{n \times n},\ b \in \mathbb{F}^n \tag{8}$$

の精度保証法は $R$ を $A$ の近似逆行列として，もし

$$\|RA - I\|_\infty < 1 \tag{9}$$

が満たされていれば，$A$ の逆行列が存在し，$x^* = A^{-1}b$ を真の解として，近似解 $\tilde{x}$ の誤差は

$$\|\tilde{x} - x^*\|_\infty \leqq \frac{\|R\|_\infty}{1 - \|RA - I\|_\infty} \|A\tilde{x} - b\|_\infty \tag{10}$$

で与えられる．式 (10) から分かるように，行列の積の包み込みさえ計算できれば，式 (10) から近似解 $\tilde{x}$ の絶対誤差 $\|\tilde{x} - x^*\|_\infty$ の上限が厳密に計算できることが分かる．

数値線形代数の問題を解く解法にとって，行列の積は基本演算である．特に，摂動論をバックグランドの一つとする精度保証理論においてはそうである．したがって，行列の積の包み込みが高速に行えることが分かったので，多くの数値計算の問題の精度保証が可能となったと予想された．これを実証するために，様々な問題の精度保証に取り組んだ．多数の論文を書く代わりに，その結果を体系的に一冊の著書にまとめることにした．こうして 3 か月ほどで出来上がったのが，文献（16）である．この本では，連立一次方程式，固有値問題，特異値，線型計画法，補間，関数計算，非線形方程式，積分方程式の精度保証付き数値計算法が行列の積の包み込みが高速に行えることをベースに高速に行えることが示されている．微分方程式については文献（16）の方法と組み合わせることにより，高速に精度保証付き数値計算できることも分かった．後に，この著作に対し大川出版賞を頂いた．

## 4. 誤差無し数値計算法の確立

この次のブレークスルーの端緒は，筆者の研究室の若い学生である荻田武史君が数値計算の精度を向上させるための新しい方向性について可能性を示したことに始まる．これは浮動小数点数の浮動小数演算による和と乗算の誤差が浮動小数点演算によって厳密に計算できるという信じられないような事実によっている．

これを説明するため少し準備をしよう．Knuth が 1969 年に著した著作[17]の中で次の事実を示していた：$a, b \in \mathbb{F}$ に対して，アルゴリズム **TwoSum** を次のように定義する：

**function** $[x, y] = \mathbf{TwoSum}(a, b)$

$x = a \oplus b$;

$c = x \ominus a$;

$y = (a \ominus (x \ominus c)) \oplus (b \ominus c)$;

ただし，$\oplus, \ominus$ はそれぞれ，(最近点への丸めモードにおける）浮動小数点演算の加算と減算である．このとき

$$a + b = x + y \quad (\mathbf{u}\,|x| \geqq |y|) \tag{11}$$

が成立する．

すなわち，$x$ は $a+b$ の浮動小数点演算における加算の結果であるため誤差を持つが，その誤差 $y = a+b-(a\oplus b)$ もまた浮動小数点数になり，それを浮動小数点演算のみで計算できることを示している．これを Knuth の定理という．

1971 年に，乗算に対しても同様な性質が成り立つことを Theodorus J. Dekker が示した[18]．これを説明するためにまず，Dekker による次のアルゴリズムを示す．ただし，$a\in\mathbb{F}$ を仮数部が $t$bit の浮動小数点数とする．

**function** $[a_H, a_L] = \textbf{Split}(a)$

$c = \mathtt{factor} \otimes a;\quad \%\ \mathtt{factor} = 2^{\lceil \frac{t}{2} \rceil} + 1$

$a_H = c \ominus (c \ominus a);$

$a_L = a \ominus a_H;$

ここで，$a_H$ は $a$ の上位ビット，$a_L$ は $a$ の下位ビットに対応するものである．このとき

$$a = a_H + a_L \quad (|a_H| \geqq |a_L|) \qquad (12)$$

が成立する．

これを用いて，Dekker は次のことを示した．まず，アルゴリズム **TwoProduct** を定義する（1968 年に，Gerhard W. Veltkamp が同様のアルゴリズムを示している）：

**function** $[x, y] = \textbf{TwoProduct}(a, b)$

$x = a \otimes b;$

$[a_H, a_L] = \textbf{Split}(a);\quad \%\ a_H + a_L \leftarrow a$

$[b_H, b_L] = \textbf{Split}(b);\quad \%\ b_H + b_L \leftarrow b$

$y = a_L \otimes b_L \ominus (((x \ominus a_H \otimes b_H)$

$\qquad \ominus a_L \otimes b_H) \ominus a_H \otimes b_L);$

このとき

$$a \times b = x + y \quad (|x| \geqq |y|) \qquad (13)$$

が成立する．

すなわち，$x$ は $a\times b$ の浮動小数点演算における乗算の結果であるため誤差を持つが，その誤差 $y = a\times b - a\otimes b$ もまた浮動小数点数になり，それを浮動小数点演算のみで計算できることを示している．これを Veltkamp-Dekker の定理という．

ここで，$p \in \mathbb{F}^n$ に対して

**function** $p' = \textbf{VecSum}(p)$

$\pi_1 = p_1;$

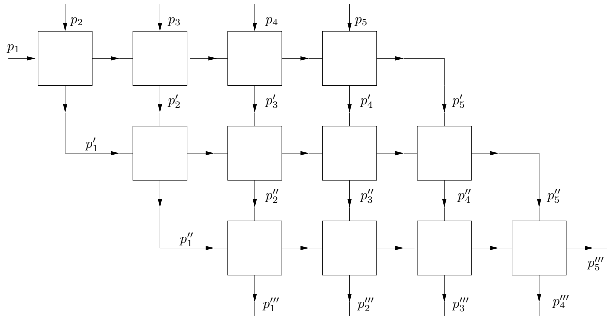
for $\ i = 2 : n$

$\qquad [\pi_i, q_i] = \textbf{TwoSum}(\pi_{i-1}, p_i);$

end

$p' = (q_2, q_3, \ldots, q_n, \pi_n)^T;$

というアルゴリズムで $p' \in \mathbb{F}^n$ を計算したとする（図 1 を参照）．このとき




**図?2　VecSum の連続的な適用**

$$\sum_{i=1}^{n} p'_i = \pi_n + \sum_{i=2}^{n} q_i = \sum_{i=1}^{n} p_i$$

が成り立つ．すなわち，ベクトル $p$ の総和は無誤差で同じ長さのベクトル $p'$ の総和に変換されることがわかる．このような変換を浮動小数点ベクトルの総和の無誤差変換[19]ということにした．**VecSum** は繰り返し適用することができる（図 2）：

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \xrightarrow{\textbf{VecSum}} \sum_{i=1}^{n} p'_i \xrightarrow{\textbf{VecSum}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p''_i \xrightarrow{\textbf{VecSum}} \cdots$$

このとき，次が成立する．

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} p'_i \fallingdotseq \sum_{i=1}^{n} p''_i = \cdots$$

荻田君が発見したのは，$\sum_{i=1}^{n} p_i$ に対して，$\sum_{i=1}^{n} p'_i$ の方が，更に，$\sum_{i=1}^{n} p'_i$ に対して $\sum_{i=1}^{n} p''_i$ の方が正確な値を出していることがあるという数値実験結果であった．条件数の小さい（易しい）総和の問題は，それらの和の間に差はなく，同じ値になる．一方，条件数の大きい（難しい）総和の問題については後の方の計算結果が正しい答えを出すという非常にミラクルな結果であった．この結果について，ルンプさんも交えた 3 人の共同研究が始まった．

その共同研究の結果，筆者らは次の極めて重要な性質を発見した[19]．まず，アルゴリズム **SumK** を定義をする．

**function** $\mathtt{res} = \textbf{SumK}(p, K)$

for $\ k = 1 : K-1$

$\qquad t = \textbf{VecSum}(p);$

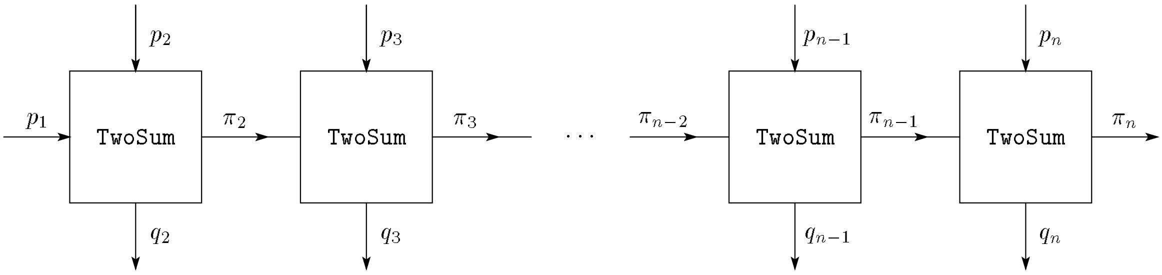
end

$\mathtt{res} = t_n \oplus \mathrm{fl}\,((\,) \sum_{i=1}^{n-1} t_i);$

ただし，$\mathrm{fl}\,((\,)\cdots)$ は括弧の中をすべて浮動小数点演算で実行することを意味する．また，次の定数を定義する：

$$\gamma_n := \frac{n \cdot \mathbf{u}}{1 - n \cdot \mathbf{u}}$$

$$\mathrm{cond}(\sum p_i) := \frac{\sum |p_i|}{|\sum p_i|}$$




**図?1　ベクトルの総和の無誤差変換アルゴリズム VecSum**

とする．後者は総和の条件数となる．res $\in \mathbb{F}$ を **SumK** によって計算された結果とすると，次が成り立つ：

$$\frac{|\mathtt{res} - \sum p_i|}{|\sum p_i|} \leqq \mathbf{u} + \mathcal{O}(\mathbf{u}^K) \cdot \mathrm{cond}(\sum p_i).$$

基本的に，**SumK** はベクトルの総和を $K$ 倍の浮動小数点演算で計算したことに相当することがこれから見てとれる．総和については特別に多倍長演算を用意しなくても **SumK** を用いれば，通常の浮動小数点演算と比べて，あたかもその $K$ 倍の内部精度で求めたのと同等の結果が得られることが分かる．すなわち，ユーザに今まで使っていなかった多倍長演算ライブラリを導入してもらわなくても，高精度な総和を計算速度の点でも高速に計算できることが分かる．

$x,\ y \in \mathbb{F}^n$ に対して

$$[t_{n+i}, t_i] = \mathbf{TwoProduct}(x_i, y_i), \quad i = 1, \cdots, n$$

とすると

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i = \sum_{i=1}^{2n} t_i$$

となる．よって，内積計算は総和の計算の問題に帰着することができることが分かる．これはいわゆる問題の難しさに応じて，計算の精度を自動的に変えながら必要な精度の解を形算する，**無誤差変換による適用的な数値計算法**のアイデアの誕生であった．すなわち，倍精度浮動小数点数などハードウェア的に高速な浮動小数点数体系を持てば，**SumK** を使うことなどによって，特別に多倍長精度ライブラリを用意することなく，簡単に高精度計算ができることが明らかになったのである．スケーラブルかつポータブルに適応的な数値計算ができる方法が見つかったことになる．

この展開は若い才能と，（ルンプさんとの）国際共同研究が不可欠であった．自分の思ってもみない方向に研究が動き出すことのきっかけは，自分の考えていない方向のアイデアが必要である．その大変良い例になったと思う．早稲田大学の情報系が受けた 21 世紀 COE や私が獲得した CREST「数値線形シミュレーションの精度保証」, JST や文部省科研費特別推進研究「精度保証付き数値計算学の確率」のサポートがこのような共同研究のチャンスを与えてくれた．

また，ここまでの研究に対して船井情報科学振興賞が与えられた．

## 5.　精度可変な数値計算法の開発

ここで，次のアルゴリズム **DotK** を導入する[19]．

**function**　res $= \mathbf{DotK}(x, y, K)$

$[p, r_1] = \mathbf{TwoProduct}(x_1, y_1);$

for　$i = 2 : n$

$\quad [h, r_i] = \mathbf{TwoProduct}(x_i, y_i);$

$\quad [p, r_{n+i-1}] = \mathbf{TwoSum}(p, h);$

end

$r_{2n} = p;$

res $= \mathbf{SumK}(r, K-1);$

内積の条件数を

$$\mathrm{cond}(x^T y) := \frac{|x|^T\,|y|}{|x^T y|}$$

と定義し，res $\in \mathbb{F}$ を **DotK** によって得られた結果とすると

$$\frac{|\mathtt{res} - x^T y|}{|x^T y|} \leqq \mathbf{u} + \mathcal{O}(\mathbf{u}^K) \cdot \mathrm{cond}(x^T y)$$

が成り立つ．これは **DotK** が通常の浮動小数点演算と比べて，その $K$ 倍の内部精度で内積を計算しているのと同等であることを示している．

内積の可変精度な計算法ができると，数値計算のほぼすべての分野で可変精度なアルゴリズムが構築できるはずである．この方向へ筆者らの研究目標が据えられた．

条件数の高い行列の精度の良い逆行列は作れるのか．ルンプさんに質問してみると，いとも簡単に全く斬新な方法が筆者の前に示された．$n \times n$ の正方行列 $A$ を考える．$A$ の条件数を

$$\kappa(A) := ||A|| \cdot ||A^{-1}||$$

と定義する．倍精度演算では浮動小数点数の相対精度が $\mathbf{u} \approx 1.11 \cdot 10^{-16}$ であることから，$\kappa(A)$ が $10^{16}$ より大きいときには，$A$ の逆行列の近似 $R$ を倍精度演算による普通のアルゴリズムで計算しても，通常 $||RA - I|| > 1$ となって精度保証ができなくなる．すなわち，$R$ 自身は数値計算によって求め

られるが，丸め誤差の影響によって，$R$ が $A$ の逆行列としての情報はほとんど持たないことを示していると思われる．数値計算の破たんである．従来このような場合を検出するときは，使用した数値計算パッケージの警告メッセージに頼るしかなく，実際には全く不正確な結果を得ていたとしても，それを正しいと信じるか，多倍長精度演算をトライアンドエラーで用いることくらいしかできなかった．

しかしながら，実は $R$ は $A$ の前処理としての情報を依然として含んでいることをルンプさんは 1980 年代に発見した（未発表であったが，後に文献（20）にまとめられた）．この性質を利用して，$||RA-I||<1$ を満たすような $R$ を高速かつ高精度に求める方法を筆者らは提案した(21),(22)．

その基本的アイデアは，$R$ を

$$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_k = \sum_{i=1}^{k} R_i, \quad R_i \in \mathbb{F}^{n\times n}$$

のように，要素が浮動小数点数である行列の和として表現することを考えたことにある．ただし

$$|R_i| \geqq 2\mathbf{u}|R_{i+1}|, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1$$

とする．行列に対する絶対値は，すべての要素に絶対値を取ったものとし，不等号は要素ごとにすべて成立していることを意味する．

このアルゴリズムの厳密な解析は非常に困難であることが知られているが，筆者らは部分的ながらその解析に成功している(21)．

アルゴリズムの性能を検証するため，実際に MATLAB を用いて数値実験を行う．計算環境は CPU: Pentium 4 (2.53GHz), MATLAB 7.0.1 (R14) である．係数行列 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ は，任意の次元数 $n$ と条件数 $\kappa(A)$ を指定できるルンプの行列(23)を用いる．右辺ベクトルは $b = (1, 1, \cdots, 1)^T \in \mathbb{F}^n$ と決める．

まず，$n = 100$，$\kappa(A) \approx 10^{100}$ のとき，次の結果を得た：

```
k = 8
*** residual iteration with verification
loop =  1, max. rel. error = 6.921332e-006
loop =  2, max. rel. error = 4.789042e-011
loop =  3, max. rel. error = 4.264335e-016
```

実行時間は 8.1s であった．結果の中で，$k$ は $R = R_1 + R_2 + \cdots + R_k$ が $||RA-I|| < 1$ を満たしたときの浮動小数点行列の個数，*loop* は残差反復の回数，*max. rel. error* は，要素ごとに数値解を相対誤差の意味で精度保証した結果の最大値

$$\max_{1\leqq i\leqq n} \epsilon_i, \quad \left|\frac{\widetilde{x}-x^*}{x_i^*}\right| \leqq \epsilon_i \in \mathbb{F}$$

である．

次に，$n = 500$，$\kappa(A) \approx 10^{50}$ に対する結果は以下のようになった：

```
k = 5
*** residual iteration with verification
loop =  1, max. rel. error = 3.776758e-009
loop =  2, max. rel. error = 1.023496e-016
```

実行時間は 190s であった．この研究を応用数理学会和文論文誌に投稿(22)したところ，論文賞を頂いた．

この例から，

**「条件数が高い係数行列を持つ連立一次方程式であっても，与えられた精度の解を，条件数に見合った時間で高速に求めることができる」**

ということが分かる．従来の数値計算法では，「与えられた問題の近似解をできるだけ少ない浮動小数点演算の回数で求めること」が表向きの命題となっていた．このとき，計算された数値解の精度はその算法の開発段階で様々な観点から検討され，良い精度の解を与えるアルゴリズムが最終的に生き残ることにより，良いものであることが期待されている．この期待は，トレフェッセンの言葉を借りれば，**多くの場合満たされるが，無視できない頻度で裏切られる**ことが経験的に知られている．

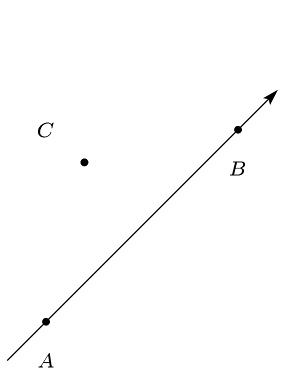
一方，筆者らの立場からは，

**与えられた精度の解を出すのに必要な計算量を減らすことが数値計算の研究である．**

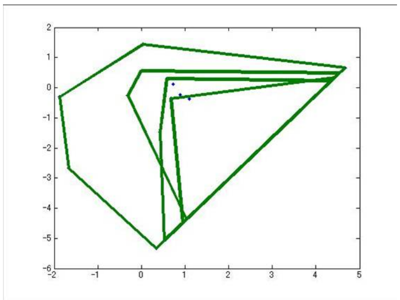
という新しい目標設定ができる．筆者は**この方向でも，多くの場合，高速な解法を生み出すことができる．**と思っており，これを実証していきたいと考えている．

高い条件数を持つ行列の逆行列を求める必要のある研究者が，筆者らの方法と数式処理による逆行列算法を比べたところ，圧倒的に筆者らの方法が速かったという結果を得たとの知らせがあった．もちろん，数式処理系との比較をこの一点だけでするわけではないが，元々，有理数演算による逆行列計算の遅さから，数値線形代数の問題の精度保証付き数値計算法の研究に入ったのであるから，このような成果が出て，その解答が得られつつあることに喜びを感じた．

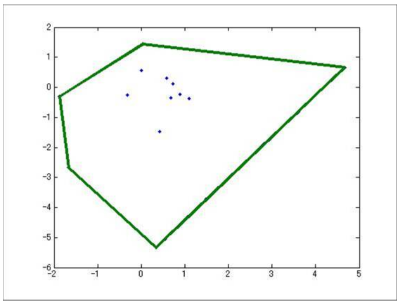
無誤差変換法を計算幾何学の問題に適用しようということは，やはり筆者の研究室の若手研究者，尾崎克久君が始めた．簡単な例は 2D Orientation Problem である．次元平面上に 3 点 $A, B, C$ を与える．図 3 のように，点 $A$ から点 $B$ へ向かう有効線分に対して，点 $C$ はその右側，左側あるいは線上に存在するかを判定する問題が 2D Orientation 問題である．$A = (a_x, a_y), B = (b_x, b_y), C = (c_x, c_y)$ とすると，この問題は次の行列式




**図**?3　2D Orientation Problem



**図?4　凸法計算で失敗する従来の計算幾何学アルゴリズム**



**図?5　精度保証付き計算幾何学アルゴリズム (必ず正しい解が出る)**

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & 1 \\ b_x & b_y & 1 \\ c_x & c_y & 1 \end{vmatrix} \tag{14}$$

の符号を判定する問題になる．この行列式を展開すると，これは座標の積和で表すことができる．すなわち，無誤差変換によって，この行列式の計算を浮動小数点数の和の問題に直すことができる．この和は，筆者らの方法によって任意精度で計算できるので，符号が正しく判定されるまでの精度でこの和を適用的に計算するアルゴリズムを作ることができる．別の言い方をすると，このアルゴリズムは，通常の浮動小数点計算で行列式の符号が正しく計算できる場合は，通常の計算法で符号を計算し，これでは正しく計算できないときは無誤差変換で符号を計算するような適応的なアルゴリズムになっており，平均的な計算量は従来の誤差を考慮していない浮動小数点計算の手間の 1.5 倍以内の高速性を有している．この新しいアルゴリズムは必ず正しい答えを出しながらこのような高速性を持っている．計算幾何学のアルゴリズムは，途中で一か所でも計算誤差のために誤った判定をすると計算が暴走して止まらなくなったり，意味のない結果を出すものが多い．

2D Orientation Problem をベースに二次元平面上に与えられた有限個の点の凸法を求めるアルゴリズムがあるが，これを誤差を考慮しない浮動小数点計算で実行すると失敗する例が図 4 である．この例を筆者らの無誤差変換法で精度保証化したアルゴリズムで計算すると，正しい解が出る (図 5)．

このような従来アルゴリズムで失敗する例は，条件数が悪い問題に相当し，そんなに高い頻度では現れないが，無視できるほどではない．精度保証化した計算幾何学アルゴリズムは必ず正しい解を導き，有限終了も保証される．平均的な計算量も従来法の 1.5 倍程度なので，凸法を求める精度保証付き計算幾何学アルゴリズムは実用的であると思われる．

## 6.　精度保証付き数値計算の将来

精度保証付き数値計算の研究は非常に発展し，筆者が研究を開始したときは，実用的ではないといわれわれてたものが，今や色々な分野で実用段にあるアルゴリズムが開発された．代数構造のない分野で，厳密な非線形解析を行いたいという当初の目的は全く変更していないが，そのために準備すべき事柄が，これほど多いとは考えていなかった．結果的に，数値線形代数の問題の高速かつ適応的な精度保証付き数値計算法を体系的に展開することになった．基本的な骨格はできたと思っているが，まだまだ多くの問題が残されており，ライフワークになると思っている．

重点を数値線形代数の問題の高速かつ適応的な精度保証付き数値計算法の研究に置いたために，アプリケーションの研究で行いたかったものもしばしそのままになったものも多い．カオスの計算機援用解析の分野では，計算ホモロジー (解説として文献（24）がある) の研究が最近大きな進展を遂げている．ようやく数学で精度保証付き数値計算の研究が正面から取り上げられ，そのことを予想していた 18 年前のことを懐かしく思っている．ローレンツ方程式のホモクリニック軌道も少し違う形であるが精度保証付き数値計算によりその存在証明がなされた(25)．

こうして，いろいろな難しい問題で，解きたかった問題もそろそろ解ける時代となった．では，今後はどのように精度保証付き数値計算の研究を進めるべきであろうか．幾つかの問題を列挙してみよう．

（1）　初等関数や特殊関数を精度保証付きで計算する機能を高速かつスケーラブルに実装する必要がある．フランスの研究者の研究によればこれは無誤差変換を通して，相当高速に，また，スケーラブルに実装できそうである．初等関数のライブラリで丸めの誤差を指定すると真の値をその丸めで丸めた結果を返すようなものが近い将来得られるのではないかと思われる．

（2）　非線形問題の解法では区間演算が必要である．これを標準化する作業が 2008 年から IEEE の活動下で始まる．近い将来，いろいろな CPU に区間演算が実装されるような標準が制定されるとよいと思う．

（3）　いろいろな工学の問題において，その設計アルゴリズムは多くの場合数値計算によっている．これが精度保証化するのはそんなに難しいことではない．数値計算が完全に信頼を持つようになる効果は，想像以上であると考えられる．

（4）　カオス解析など数値計算をベースに科学的に研究を進める分野に精度保証付き数値計算を導入する．このよう

な分野の最先端では誤差を検討するよりも，何とか大きな問題の意味のある近似解を求めるのが最先端の状況である．ここへ，計算規模は小さくなるが信頼性がある精度保証付き数値計算を導入するとどのような学問的な成果が得られるか興味深い．

（5） マルチ精度数値計算法の開発．無誤差変換を用いると，等価的に多倍長計算が簡単に導入できる．倍精度計算を主としながらも，クリティカルな箇所に高精度計算を用いることにより，全体の精度を高める方法を追求することが課題となる．

## 7. まとめ

以上の議論をまとめてみたい．

（1） 筆者が精度保証付き数値計算の研究を追求できた理由は，非線形微分方程式の厳密解を求めるための代数的ではない方法の追求という，研究の方向が明確に定まっていたことにある．もし，数値計算を研究する研究室で通常の数値計算の研究を行っていたら，精度が完全に保証された数学的に正しい結果が出ないと無意味という価値観は持てなかったと想像する．ある意味で数値計算の門外漢から出発点したのが，惑わず精度保証の研究に取り組めた理由になっている．微分方程式の解の計算機援用証明に，数値誤差があっては証明にならないからである．

（2） 1990 年代は IEEE754 という 2 進浮動小数点数規格も制定され，LAPACK などの数値計算ライブラリや MATLAB などの数値計算ツールも整備が急速に進んだ．また，並列計算も MPI などのデファクトスタンダード化が進み，手軽に行えるようになった．このような計算機環境の飛躍的な進展にも恵まれ，精度を中心に議論する足場が整っていったのも，精度保証付き数値計算の研究の進展に有利であった．

（3） 山本哲朗先生（愛媛大学名誉教授，元早稲田大学客員教授）が Mathematical Congress が京都で開催された 1990 年以降，数値計算の国際会議を毎年開催し，筆者もこれに招待されて，国際的に広く精度保証付き数値計算の研究者の友人を得て，その中から価値観を共有する研究者を見いだせたことが，筆者の精度保証付き数値計算の研究を推進する大きな力となった．どんな分野を研究するときも研究仲間を世界中の研究者の中から探すことが重要であろう．その意味で，適齢期になったら後輩のために国際的な研究集会を組織してあげることが重要であると考えている．

（4） 精度保証付き数値計算に入ったときは 37 歳で，既に幾つかの分野の研究を経た後であった．一つの研究分野の栄枯盛衰や真にインパクトのある研究はどのようなものかというようなことについての勘は既に備えていた．これが精度保証付き数値計算の開始当時のような日本国内で余り研究者のいなかった分野の研究を進めるに当たり，大いに役立った．じっくりと自分の価値観を追求して，最も大事と思われるところで成果を出すようにできた．

（5） 研究室内に若手研究者を育てる環境を整備した．外国人研究者が長く滞在し，フェロー級の先輩研究者との議論もできる環境を整えた．博士課程の学生やポスドクの若手研究者が新しい感性で研究の新分野を切り開いてくれた．誤差なし変換法による適応的数値計算の分野の開拓は国際共同研究と若手との共同研究の成果である．

本稿の議論は精度保証付き数値計算の研究を行った筆者の研究の個人史である．したがって，特殊な分野の事情を論じているが，研究の推進法の一例として読者の参考になる部分があることを願って筆を置く．

## 文　献


(1) S. Oishi, “ A method of analysing soliton equations by bilinearization,” J. Phys. Soc. Jpn, vol.48, no.2, pp. 639-646, 1980.

(2) S. Oishi, ”Relationship between Hirota’s method and the inverse spectral method- the Korteweg-deVries equation’s case-,” J. Phys. Soc. Jpn, vol.47, pp.1037-1038, 1979.

(3) 廣田良吾，直接法によるソリトンの数理，岩波書店，1992. (英訳：R. Hirota, (translated by A. Nagai, J. Nimmo, C. Gilson) The Direct Method in Soliton Theory, Cambridge University Press, 2004.)

(4) 小島政和, 相補性と不動点：アルゴリズムによるアプローチ, 産業図書. 1981.

(5) M. Urabe, “ Galerkin’s procedure for nonlinear periodic systems,” Arch. Ration. Mech. Anal., 20, pp.120-152, 1965.

(6) 中尾充宏, “ 関数方程式の解の存在に対する数値的検証法,” 数学, vol.42, p.16, 1990.

(7) 中尾充宏, “ 精度保証付き数値計算の現状と動向,” 特集:精度保証付き数値計算とその応用 (山本哲朗，野寺隆編), vol.31, no.9, Sept. 1990.

(8) T. Sunaga, “ Theory of interval algebra and its application to numerical analysis,” Research Association of Applied Geometry (RAAG) Memoirs, vol. 2, pp. 29-46 (547-564), Ggujutsu Bunken Fukuy-kai, Tokyo, Japan, 1958.

(9) R.E. Moore, Interval Analysis, Prentice-Hall, New York, 1966.

(10) U. Kulisch and W. Miranker, Computer Arithmetic, Academic Press, New York, 1982.

(11) G. Alefeld and J. Herzberger, Introduction to Interval Computations, Academic Press, N.Y., 1983.

(12) 久保田光一, 伊理正夫, アルゴリズムの自動微分と応用, コロナ社,1998.

(13) S. Oishi, “ Two topics in nonlinear system analysis through fixed point theorems,” IEICE Trans. Fundamentals, vol.E77-A, no.7, pp.1144-1153,July 1994.

(14) 大石進一, 非線形解析入門，コロナ社,1997.

(15) S. Oishi and S.M. Rump, “ Fast verification of solutions of matrix equations,” Numer. Math. vol.90, no.4, pp.755-773, 2002.

(16) 大石進一, 精度保証付き数値計算，コロナ社, 2000.

(17) D. E. Knuth, The Art of Computer Programming, Volume 1 Fundamental Algorithms, Addison-Wesley, 1969.

(18) T. J. Dekker, “ A floating-point technique for extending the available precision, ” Numer. Math., vol.18 pp.224–

242, 1971.
(19) T. Ogita, S. M. Rump, and S. Oishi," Accurate sum and dot product, " SIAM J. Sci. Comput., vol.26, pp.1955-1988, 2005.
(20) S. M. Rump," Approximate inverses of almost singular matrices still contain useful information, "Forschungsschwerpunktes Informations- und Kommunikationstechnik, Technical Report, 90.1, Technical University Hamburg-Harburg, 1990.
(21) S. Oishi, K. Tanabe, T. Ogita, and S. M. Rump," Convergence of Rump's method for inverting arbitrarily ill-conditioned matrices, " J. Comput. Appl. Math., vol1. 205, no.1, pp.533-544, 2007.
(22) 太田貴久, 荻田武史, S. M. Rump, 大石進一, " 悪条件連立一次方程式の精度保証付き数値計算法, " 日本応用数理学会論文誌, vol.15, pp.269-287, 2005.
(23) S. M. Rump, " A class of arbitrarily ill-conditioned floating-point matrices, "SIAM J. Matrix Anal. Appl., vol.12, pp.645-653, 1991.
(24) 荒井　迅, " 計算機支援による離散力学系の解析," 応用数理, vol.15, pp.20-31, 2005.
(25) W. Tucker," A rigorous ODE solver and Smale 's 14th problem," Found. Comput. Math., vol.2, pp.53-117, 2002.

**大石　進一**　（正員：フェロー）

1976 年 3 月早大理工電子通信学科卒. 1981 年早大大学院博士後期課程修了（工学博士）. 1980 年早大理工助手，1982 年専任講師，1984 年助教授を経て 1989 年より同大学教授. 電子通信学科，情報学科，コンピュータ・ネットワーク工学科を経て 2007 年より理工学術院基幹理工学部応用数理学科教授. 現在，精度保証付き数値計算の研究に従事. 本会の基礎・境界グループ庶務幹事，非線形問題研究会専門委員長，IEICE Trans. Fundamentals Editor，和文論文誌 A 編集長，編集特別幹事，評議員，教科書委員会企画委員会委員など. 現在，基礎・境界ソサイエティ会長. 本会の学術奨励賞，論文賞（3 回），猪瀬賞各受賞. 小野梓賞，丹羽記念賞，大川出版賞，船井情報科学振興賞，日本応用数理学会論文賞，電気通信普及財団テレコムシステム技術賞など受賞. 文部科学省科学技術・学術審議会学術分科会理工系委員会委員，NHK 放送技術研究委員会委員歴任. JST CREST および文部科学省科研費特別推進研究の研究代表者. NOLTA Symposium の General Co-Chair（2 回）. JTC-CSCC の General Co-Chair. Dagstuhl Seminar 05391 "Algebraic and Numerical Algorithms and Computerassisted Proofs" の Co-Organizer など. 単著にフーリエ解析（岩波書店），例に基づく情報理論（講談社サイエンティフィック），非線形解析入門（コロナ社），数値計算（裳華房），Linux 数値計算ツール（コロナ社），微積分とモデリングの数理（朝倉書店），MATLAB による数値計算（倍風館），精度保証付き数値計算（コロナ社），待ち行列理論（コロナ社）. 共著にグラフィックス（日本評論社），電子情報通信と数学（電子情報通信学会）など. 非線形科学シリーズ（コロナ社）編集委員長など. 現在，日本シミュレーション学会と日本応用数理学会の理事.